

**МАТЕМАТИЧНА ФОРМАЛІЗАЦІЯ ДИНАМІЧНИХ СТАНІВ ПАРОРІДИННИХ  
ДВОФАЗНИХ СИСТЕМ****С.А. Положаєнко, Д.А. Лись**Державний університет «Одеська політехніка»  
просп. Шевченка, 1, Одеса, 65044; e-mail: sanp277@gmail.com

В межах хвильової динаміки двофазних середовищ — як розділу механіки неоднорідних систем та теплофізики, що інтенсивно розвивається, розглянуто можливості математичного опису (формалізації) процесів динаміки парорідинних двофазних систем. При цьому, на підставі врахування ефекту міжфазної взаємодії та використання концепції хвильових рухів, запропоновано гомогенну математичну модель динамічних станів парорідинних двофазних систем. Актуальність такої моделі полягає в тому, що двофазні потоки являють собою основне «робоче тіло», зокрема, в енергетичних установках та апаратах хімічної технології, а робочі процеси в металургійній, нафтодобувній та нафтопереробній (в т. ч. нафтохімічній) промисловості, в криогенних апаратах супроводжуються утворенням парорідинних систем. В зв'язку з цим, наявність адекватної гомогенної математичної моделі динаміки для середовищ, які розглядаються, заснованої на врахуванні законів збереження та придатної для застосування у інженерних розрахунках, слід розглядати як перевагу над емпіричними моделями, які забезпечують задовільну точність розрахунків лише в обмеженому діапазоні параметрів і абсолютно непридатних для позаштатних та аварійних режимів. Проведений аналіз розповсюдження нелінійних хвиль та формування ударних хвиль у парорідинному (або газорідинному) середовищі на основі гомогенного представлення останнього показує аналогічність традиційному газодинамічному підходу, але, тим не менш, парорідинна (або газорідинна) суміш має певні особливості. Перед усім це стосується ідеалізації гомогенної суміші як деякого газу — континууму, у якого густина рідини, а властивість стискання як у газового середовища. Наслідком останнього є низькі значення швидкості звука та висока нелінійність, спричинена залежністю від тиску, особливо на ділянках його зростання. Можна вважати, що гомогенна модель є достатньо інформативною, щоб дозволити робити висновки щодо можливих механізмів перебігу динамічних процесів для парорідинної (газорідинної) суміші та прогнозувати подальший їх розвиток за умови апріорної інформації про газодинамічні характеристики двофазної системи.

**Ключові слова.** Парорідинні суміші, двофазні системи, гомогенна модель, математична модель, нелінійні та ударні хвилі.

**Вступ**

Певне розповсюдження в літературі [1 — 4], як достатньо наглядний та зручний спосіб континуального представлення двофазного середовища, зокрема газо- або парорідинної суміші, віднайшло представлення у вигляді *гомогенної суміші*. Таке трактування парорідинних двофазних систем (ПРДС) коректне за умови перебування останніх у *бульбашковому режимі* [1 — 3, 5], що є достатньо характерним фізичним станом парорідинної суміші [6, 7]. Суміш рідини та газу (пару) в даному випадку розглядається як деяке однорідне середовище із середньою температурою  $T$ , густиною  $\rho$  та тиском  $P$ . Основним припущенням даного представлення є швидкий обмін імпульсом, теплою та масою між фазами. Внаслідок цього, температури та швидкості руху фаз вважаються такими, що дорівнюють одна одній. Вважається, що тиск у рідинній фазі  $P_1$  або дорівнює тискові в газовій фазі  $P_2$ , або відрізняється на величину лапласівського тиску  $\Delta P = 2\sigma/R$ , де  $R$  — радіус бульбашок (середній),  $\sigma$  — коефіцієнт поверхневого

напруження (тут, і подальшому, індекс 1 позначає рідку фазу, а індекс 2 — пар або газову фазу).

Складання гомогенної математичної моделі (ММ) динамічних станів ПРДС дає подальший розвиток теорії нестационарної гідро-(газо)динаміки і дає змогу, хоча б у першому наближенні, врахувати особливості двофазних парорідинних систем. Така ММ може бути спробою створення простих хвильових моделей, які відповідають законам збереження, притаманних динамічним режимам, в яких перебувають двофазні системи.

## Мета роботи

Формування ММ стану парорідинної двофазної системи (суміші), яка забезпечує адекватну формалізацію динамічних властивостей системи (суміші) у всіх технологічних режимах її перебування.

## Основна частина

Для складання гомогенної математичної моделі ПРДС будемо вважати, що парова (газова) фаза складається з бульбашок одного розміру, а кількість бульбашок  $N$  на 1 кг маси суміші не змінюється, то питомий об'єм пару (газу) в суміші буде складати  $V = (3/4)\pi R^3 N$ . Істинний об'ємний вміст пару (газу)  $\varphi$  очевидно зв'язаний з  $V$  та густиною середовища  $\rho$  наступним чином:  $\varphi = V\rho$ . В літературі, присвяченій дослідженню ПРДС [6, 7], зустрічається інший вираз для визначення  $\varphi$ , а саме:  $\varphi = (3/4)\pi R^3 N\rho = (3/4)\pi R^3 n$ , де  $n = N\rho$  — кількість бульбашок в одиниці об'єму. При цьому слід зазначити, що на відміну від  $N$ , величина  $n$  не є постійною. Масовий паро-(газо-)вміст  $X$  визначимо через  $\varphi$  та густину пару (газу):  $X = V\rho_2 = \varphi\rho_2/\rho$ . На відміну від об'ємного масовий паро-(газо-)вміст при відсутності фазових переходів не змінюється.

Середню густину суміші (двофазної системи) можна увести через об'ємний паро-(газо-)вміст  $\varphi$  співвідношенням

$$\rho = \rho_1(1 - \varphi) + \rho_2\varphi \quad (1)$$

або масовий паро-(газо-)вміст  $X$ , відповідно:

$$1/\rho = (1 - X)/\rho_1 + X/\rho_2 = (1 - X)/\rho_1 + V. \quad (2)$$

Використавши  $\rho$  з рівняння (1), можна віднайти зв'язок між  $\varphi$  та  $X$ :

$$X = \frac{\rho_2\varphi}{\rho_2\varphi + \rho_1(1 - \varphi)}.$$

Далі можна отримати:

$$\delta V/V = \frac{\delta P(1 - \varphi)^2(1 - X)}{c_1^2\rho\varphi} - \frac{\delta P}{\rho\varphi} = \frac{\delta P}{\rho\varphi} \left[ \frac{(1 - \varphi)^2(1 - X)}{c_1^2} - 1 \right], \quad (3)$$

де  $c_1$  — швидкість звуку у рідині. Тут використано акустичний зв'язок між збудженнями густини рідини та тиску в середовищі:  $\delta\rho_1 = \delta P/c_1^2$ .

Таким чином, суміш бульбашок з рідиною розглядається як деякий газ, густина якого близька до густини рідини, а стискання цього середовища визначається стисканням газової або парової фази. Можна визначити деякі основні термодинамічні характеристики цієї суміші:

— ентропію

$$s = s_1(1 - X) + s_2 X ;$$

— ентальпію

$$h = h_1(1 - X) + h_2 X .$$

Для гомогенної моделі важливою властивістю є рівновага парорідинної суміші, яку може бути порушено навіть незначними впливами та хвильовими збудженнями.

#### Поширення малих збуджень та нелінійних хвиль

Рівняння гомогенної моделі будується по аналогії з рівнянням гідрогазодинаміки однофазного середовища [8, 9] і можуть бути представлені у вигляді

$$\begin{cases} \partial\rho/\partial t + \partial(u\rho)/\partial x = 0; \\ \partial u/\partial t + u\partial u/\partial x = -(1/\rho)\partial P/\partial x; \end{cases} \quad (4)$$

$$\partial h/\partial t + u\partial h/\partial x = (1/\rho)(\partial P/\partial t + u\partial P/\partial x). \quad (5)$$

Тут  $u$ ,  $\rho$ ,  $P$ ,  $h$  — відповідно швидкість, густина, тиск та ентальпія суміші.

Малі збудження представимо з урахуванням уявлення про *адіабатичність* процесу на основі лінійної моделі (4), (5):

$$\partial u/\partial t = -(1/\rho_0)\partial P/\partial x ; \quad \partial\rho/\partial t = -\rho_0 \partial u/\partial x$$

або

$$\begin{aligned} \partial^2\rho/\partial t^2 &= \partial^2 P/\partial x^2; \\ ds/dt &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

При математичному описі динаміки газорідинної суміші, як і в газодинаміці, нелінійними є не тільки рівняння руху суміші (4), (5), але і рівняння стану, тобто джерело нелінійності — залежність швидкості звуку  $c$  від поточних значень збуджень швидкості. Тому тільки при нелінійному аналізі розповсюдження хвиль в рідині з бульбашками можна користуватися значенням  $c = (\partial P/\partial\rho)_s^{0,5}$  при  $P = P_0$ ,  $\rho = \rho_0$ ,  $\varphi = \varphi_0$ .

З вищеприведеного випливає, що

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial P}\right)_s \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 0$$

або

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - \left( \frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_s - \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 0. \quad (7)$$

При розгляді газорідного середовища у випадку, коли в процесі розповсюдження рідини масовий газовміст  $X$  не змінюється і зміна густини відбувається за рахунок стискання бульбашок, для  $(\partial \rho / \partial P)_s$  можна скористатися формулою Меллока [10]

$$c_m^2 = \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{c_2^2}{\varphi(1-\varphi)} = \frac{\gamma P}{\rho \varphi}$$

(де  $\gamma$  — показник адиабати газу)

з початковими значеннями параметрів  $P = P_0$ ,  $\rho = \rho_0$ ,  $\varphi = \varphi_0$ :

$$\left( \frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_s = \frac{\gamma P_0}{\rho_0 \varphi_0}, \quad (8)$$

і (7) приймає вигляд лінійного хвильового рівняння

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - \frac{\gamma P_0}{\rho_0 \varphi_0} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 0. \quad (9)$$

В іншому граничному випадку, коли розглядається парорідне середовище та при розповсюдженні хвилі зміна густини відбувається виключно за рахунок зміни паровмісту  $X$ , вираз  $(\partial P / \partial \rho)_s$  може бути визначено за співвідношенням

$$\left( \frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_s = c_2^2 = \frac{P_2^2 L^2}{\rho^2 C_p \bar{B}^2 T^3}, \quad (10)$$

де  $L$  — прихована теплота пароутворення,  $P_2 = P$ ,  $\bar{B}$  — питома газова постійна,  $T$  — поточна температура, а рівняння (7) набуде вигляду:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - \frac{P_0^2 L^2}{\rho_1^2 C_p \bar{B}^2 T^3} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 0. \quad (11)$$

Аналіз похідної  $(\partial P / \partial \rho)_s$  можна провести на основі класичного методу переходу до нових термодинамічних змінних. Тиск  $P$  має власні змінні (параметри)  $\rho$  та  $s$ . Переходячи до нових змінних  $\rho$  та  $X$  і використовуючи властивість якобіанів та умову калібрування термодинамічних потенціалів [8], можна отримати:

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_s = \frac{\partial(P, s)}{\partial(\rho, s)} = \frac{\partial(P, s)}{\partial(\rho, X)} \cdot \frac{\partial(P, X)}{\partial(\rho, s)}, \quad (12)$$

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_s = \frac{(\partial s / \partial X)_P}{(\partial \rho / \partial P)_X (\partial s / \partial X)_P - (\partial s / \partial P)_X (\partial \rho / \partial X)_P}. \quad (13)$$

У парорідинному середовищі без фазових переходів  $X = \text{const}$ , і з (13) випливає

$$(\partial P / \partial \rho)_s = (\partial P / \partial \rho)_X = \gamma P / (\rho \varphi) = c_M^2. \quad (14)$$

Для парорідинного середовища, коли  $(\partial P / \partial \rho)_X = 0$ , тобто густина змінюється тільки за рахунок зміни  $X$ , можна записати

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_s = \frac{(\partial s / \partial X)_P}{-(\partial s / \partial P)_X (\partial \rho / \partial X)_P} = \frac{P^2 L^2}{\rho_1^2 C_R \bar{B}^2 T^3} = c_2^2. \quad (15)$$

У загальному випадку, коли зміна густини відбувається за рахунок властивості стискання та зміни  $X$ , також справедливою є формула (13), з якої випливає

$$c^{-2} = c_M^{-2} + c_2^{-2} \quad \text{або} \quad c^2 = \frac{c_M^2 c_2^2}{c_M^2 + c_2^2}, \quad (16)$$

де  $c_M$  та  $c_2$  визначаються формулами (14) та (15).

Таким чином, якщо при розповсюдженні хвилі має місце фазовий перехід (тобто зміна  $X$ ), то в рамках рівновагового підходу розповсюдження збудження відбувається зі швидкістю, близькою до  $c_2$ . З урахуванням зробленого зауваження, вирази (12), (13) та (15) (з відповідними початковими та граничними умовами) можна розглядати як гомогенну ММ ПРДС для можливих обмежень щодо виникнення *бульбашкового режиму*.

Наслідками високого ступеню стискання парорідинної суміші є низькі значення швидкості звуку та висока нелінійність, які виникають через значну залежність  $c = c(P)$  на початковій ділянці росту тиску.

На практиці поширеним станом перебування ПРДС є утворення ударних хвиль. Розглянемо особливості гомогенної ММ ПРДС за умови існування ударних хвиль.

#### Ударні хвилі

Через нелінійність хвилі в середовищі можливі «перехлест» та утворення ударних хвиль. Ударні хвилі у газовій динаміці розглядаються як розриви, на границях яких виконуються певні співвідношення, що є наслідками законів збереження.

Газодинамічний аналіз стрибків в рамках гомогенної моделі в уявленні того, що ударні хвилі в рідині з бульбашками газу існують і є ізотермічними, було виконано в роботі [11]. Відповідно до результатів роботи [11] можна записати закони збереження маси та імпульсу на границі розриву, а саме (для простоти запису не застосовуючи індекс «см» при позначенні паро-(газо-)рідинної суміші):

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2; \quad P_1 + \rho_1 u_1^2 = P_2 + \rho_2 u_2^2. \quad (17)$$

Тут індекс 1 відповідає стану паро-(газо-)рідинної суміші до розриву, а індекс 2 — після розриву. Вважаючи процес стискання бульбашок ізотермічним, очевидно що  $P_1V_1 = P_2V_2$ , а враховуючи, що  $V = \varphi/\rho$ , можна отримати

$$P_1/P_2 = \varphi_2\rho_1/\varphi_1\rho_2. \quad (18)$$

Замінюючи  $u_2 = \rho_1u_1/\rho_2$  закон збереження імпульсу можна записати наступним чином:

$$u_1^2 = \frac{(P_1 - P_2)\rho_2}{\rho_1(\rho_2 - \rho_1)}. \quad (19)$$

Вважаючи, що рідина є такою, що не стискається, можна записати

$$(\rho_2 - \rho_1) \approx \rho_1(\varphi_1 - \varphi_2); \quad u_1^2 = \frac{(P_1 - P_2)\rho_2}{\rho_1^2\varphi_2(\varphi_1/\varphi_2 - 1)}. \quad (20)$$

З рівняння ізотермічності видно, що  $\varphi_1/\varphi_2 = (1 - \varphi_1)P_2/[(1 - \varphi_2)P_1]$ . Підстановка останнього в (20), і беручи до уваги співвідношення  $(1 - \varphi_1)/(1 - \varphi_2) \approx 1$ , можна отримати  $u_1^2 = (P_2 - P_1)\rho_2P_1/[(P_2 - P_1)\rho_1^2\varphi_2]$ . Оскільки  $(1 - \varphi_2) \approx 1$ ,  $(1 - \varphi_1) \approx 1$ , то, виконавши заміну по (1.33), можна віднайти

$$u_1^2 = P_2/\varphi_1\rho_1, \quad (21)$$

де  $P_2$  — повний тиск за ударною хвилею.

У випадку, коли амплітуду ударної хвилі спрямовано до нуля, формула (21) переходить у вираз для квадрата швидкості звуку  $c_0^2 = \gamma P_0/\rho\varphi_0$ . Співвідношення (21), яке зв'язує швидкість ударної хвилі з інтенсивністю стрибка, добре узгоджується з формулою Кемпбела-Пітчера [11], яку часто використовують при газодинамічному аналізі ударних хвиль.

## Висновок

Для поширених випадків існування ПРДС (малих збуджень та нелінійних хвиль) отримано їх ММ у вигляді гомогенної моделі. Актуальність розробки саме гомогенної моделі ПРДС пояснюється тим, що значна кількість двофазних систем мають властивість значного стискання (тобто швидкість звуку в таких системах мала), характеризуються нелінійністю і, тому для розрахунку динаміки таких середовищ, що рухаються з відносно невеликими швидкостями, необхідно застосування газодинамічних методів. Крім того, рух двофазних систем супроводжується процесами міжфазного теплообміну, які спричиняють сильну дисипацію середовища, а інерційні властивості газових включень породжують залежність швидкості звуку від частоти — дисперсію швидкості звуку. Тому методи традиційної газової динаміки не відповідають специфіці двофазних потоків і дають незадовільні результати при розрахунках.

Для частинного випадку утворення ударних хвиль, спричинених розривністю потоку, розглянуто особливості складання гомогенної моделі ПРДС за умови існування хвилі до та після розривів.

**Список літератури**

1. Айдагулов Р. Р., Хабеев Н.С., Шагапов В.Ш. Структура ударной волны в жидкости с пузырьками газа с учетом нестационарного межфазного теплообмена. *Журнал прикладной механики и технической физики*. 2005. № 3. С. 67 — 74.
2. Акуличев В.А., Алексеев В.Н., Бурлаков В.А. Акустические волны в жидкости с паровыми пузырьками. Нелинейные процессы в двухфазных средах. Новосибирск: Изд-во Новосибирского ун-та, 2007. С. 114 — 121.
3. Воинов О.В., Петров А. Г. Движение пузырей в жидкости. *Итоги науки и техники. Сер.: Мех. жидкости и газа*. 2006. Т. 10. С. 86 — 147.
4. Кутателадзе С.С. Анализ подобия и модели термодинамике газожидкостных систем *Журнал прикладной механики и технической физики*. 2000, № 5. С. 24 — 33.
5. Акуличев В.А., Алексеев В.Н. О динамике паровых пузырьков в жидководородных пузырьковых камерах. *Акустический журнал*. 2007. Т. 17. № 3. С. 356 — 364.
6. Багатуров С.А. Основы теории и расчета перегонки и ректификации. М.: Энергия, 2014. 440 с.
7. Прауэниц Дж.М., Эккерт К.А., О'Рай Р.В., О'Коннепп Дж.П. Машинный расчет парожидкостного равновесия многокомпонентных смесей. М.: Химия, 2007. 217 с.
8. Гарипов Р.М. Замкнутые уравнения движения жидкости с пузырьками. *Журнал прикладной механики и технической физики*. 2003. №6. С. 3 — 24.
9. Zwick S.A. Behaviour of small permanent gas bubbles in a liquid. *J. Math. and Phys.* 2008. V. 37, No 3. P. 36 — 52.
10. Кедринский В.К. Распространение возмущений в жидкости, содержащей пузырьки газа. *Журнал прикладной механики и технической физики*. 2008. № 4. С. 29 — 34.
11. Campbell I.J., Pitcher A.S. Shock waves in a liquid containing gas bubbles. *Proc. Roy. Soc. Ser. A*. 2008. V. 243, No 1235. P. 534 — 545.

**MATHEMATICAL FORMALIZATION OF DYNAMIC STATES OF  
VAPOR-LIQUID TWO-PHASE SYSTEMS**

S.A. Polozhaenko, D.A. Lys

Odessa National Polytechnic University  
1, Shevchenko Ave., Odessa, 65044, Ukraine; e-mail: sanp277@gmail.com

Within the framework of wave dynamics of two-phase media – as a section of mechanics of inhomogeneous systems and thermo physics, which is intensively developing, the possibilities of mathematical description (formalization) of the processes of dynamics of vapor-liquid two-phase systems are considered. In this case, based on the effect of interphase interaction and the use of the concept of wave motions, a homogeneous mathematical model of dynamic states of vapor-liquid two-phase systems is proposed. The relevance of this model is that two-phase flows are the main "working fluid", in particular, in power plants and chemical technology, and work processes in the metallurgical, oil and refining (including petrochemical) industry, in cryogenic devices accompanied by the formation of vapor-liquid systems. In this regard, the availability of an adequate homogeneous mathematical model of dynamics for the environments under consideration, based on conservation laws and suitable for use in engineering calculations, should be considered as an advantage over empirical models that provide satisfactory accuracy only in a limited range of technological parameters and completely unsuitable for emergency and emergency modes. The analysis of the propagation of nonlinear waves and the formation of shock waves in a vapor-liquid (or gas-liquid) medium based on a homogeneous representation of the latter shows similarity to the traditional gas-dynamic approach, but, nevertheless, vapor-liquid (or gas-liquid) mixture has certain features. First of all, this applies to the idealization of a homogeneous mixture as a gas - a continuum, which has a liquid density and the property of compressing the gaseous medium. The consequence of the latter is low values of the speed of sound and high nonlinearity caused by the dependence on pressure, especially in areas of its growth. We can assume that the homogeneous model is quite informative, which allows us to draw conclusions about possible mechanisms of dynamic processes for vapor-liquid (gas-liquid) mixture, and predict their further development provided a priori information about the gas-dynamic characteristics of a two-phase system.

**Keywords:** Vapor-liquid mixtures, two-phase systems, homogeneous model, mathematical model, nonlinear and shock waves.