DOI 10.15276/imms.v12.no1-2.124
УДК 517.518.84

Informatics and Mathematical Methods in Simulation
Vol. 12 (2022), No. 1-2, pp. 124-131

ЗМЕНШЕННЯ ФЕНОМЕНУ ГІББСА ДВОВИМІРНИМИ АПРОКСИМАЦІЯМИ

І. В. Шапка, Т.С. Науменко

Український державний хіміко-технологічний університет
просп. Гагаріна, 8, Дніпро, 49005, Україна, e-mail: irinaschapka@ukr.net

В роботі запропоновано та обґрунтовано доцільність застосування феномену Гіббса. Це явище виникає на краю розриву функції, для якої проводиться аналіз. Розглядається створення способу побудови таких багатовимірних апроксимацій наближень та визначення множини коефіцієнтів ряду, необхідного для побудови наближення заданої структури. Визначено умови збіжності апроксимант наближуваних багатовимірних функцій, побудованих за розробленою методикою. Показано, що в розрахунках двовимірних апроксимацій застосування феномена Гіббса дає можливість значно знизити якість обробки зображень для більшості популярних графічних стандартів, оскільки вони використовують кінцеву суму гармонік. Стиснення зображення відіграє дуже важливу роль у багатьох технологічних програмах, наприклад, документи та медичні зображення, телевізійні відеоконференції тощо. Методи стиснення зображень часто поділяють на дві категорії: без втрат та з втратами. Методи без втрат зазвичай вибираються для програм, де важливо зберегти дуже дрібні деталі зображення. До них можна віднести медичні та космічні дослідження, дистанційне зондування. З іншого боку, методи з втратами застосовуються в ситуаціях, коли потрібен значний ступінь стиснення. Це стосується, наприклад, цифрової фотографії, де, як правило, втрата деяких деталей зображення не є критичною. Вибираючи алгоритм стиснення, важливо розібратись з його позитивними і негативними сторонами. Вибираючи алгоритми з втратою частини даних, необхідно чітко розуміти за яких умов зображення буде втрачати якість сприйняття людиною.Це пов'язано з тим, що нечіткість відбувається на границях контрасної різкої зміни і призводить до появи помилкових оптичних тіней та до неякісного аналізу при обробці результатів рентгенологічних і сонарних досліджень. Розроблено було двовимірний метод апроксимацій типу Паде, який зменшує явище Гіббса для гармонійного двовимірного ряду Фур'є. Такий підхід дозволяє розробити схему застосування методу, алгоритм обробки зображень і його ефективність. Завдяки цьому виникає можливість оптимізувати підрахунки та побудувати алгоритм перетворень.

Ключові слова: апроксимація Паде, феномен Гіббса, двовимірні ряди Фур’є, дискретне косинусне та синусне перетворення.

Вступ

Пошук оптимального рішення для конкретних задач вимагає обґрунтованого вибору найбільш доцільних методів. Говорячи про феномен Гіббса - це особлива поведінка одновимірного ряду Фур'є при розкладанні розривної періодичної функції та скорочуванні доданків за умови використання кінцевої кількісті членів [1,3-4,11]. Сам ряд для нескінченної кількості членів у точці розриву дає півсуму значень функції праворуч і ліворуч від розриву, а в усіх інших точках рівномірно і абсолютно наближає цю функцію до максимуму. У випадку викривлення відбувається викривлення поблизу точок розриву, які неможливо усунути шляхом збільшення кінцевої кількості доданків ряду.

Не можливо не відмітити, що для двовимірної апроксимації також існує феномен Гіббса, який значно підвищує якість обробки зображень для більшості популярних графічних стандартів, оскільки вони використовують кінцеву суму гармонік [2-4]. Доказом цьому можуть бути праці, присвячені викривленням, що відбуваються на кордонах різкої зміни контрасту і призводить до появи помилкових оптичних тіней [2,7-8]. Це позначається на якості аналізу при обробці результатів рентгенологічних і сонарних досліджень. Феномен Гіббса є тип артефакту магнітно-резонансної томографії, який призводить до ряду ліній на магнітно-резонансному зображенні, паралельних різких і інтенсивних змін об'єкта, таким як спинномозкова рідина і інтерфейс череп-мозок [4]. Це свідчить тому, що тематика зменшення феномену Гіббса є актуальною.

Теорія наближення функцій математичної фізики є найбільш швидко розвиваючою сферою математики [1,6]. Традиційно апроксимація розглядається з використанням поліномів [1,6,9,10] і тригонометричних функцій [5]. Найбільш вдалою розробкою таких наближень є наближення дробово-раціональними функціями [1,6,9]. Інтерес до теорії дробово-раціональних наближень неухильно зростає в зв'язку з їх широким застосуванням в різних дослідженнях в галузі теоретичної фізики, прикладної механіки, геофізики і ін. [2,7] через можливість узагальненого підсумовування з використанням рядів і розширенням функцій, які повинні бути апроксимовані в області мероморфності.

В останній час великий інтерес приділяється розширенню класичної теорії наближення дробово-раціональними функціями на різні типи базисних функцій і різні методи побудови наближень типу Паде [1,9]. Вибір відповідного методу побудови апроксимації дозволяє у більшості випадках досягти істотного поліпшення корисних властивостей апроксимант для деяких виокремлених класів функцій [1,9].

Ми пропонуємо використовувати двовимірний метод наближення типу Паде, що дасть можливість зменшити явище Гіббса для гармонійного двовимірного ряду Фур'є.

Основна частина

Приведемо метод побудови наближень Паде-типу для гармонійного двовимірного ряду Фур'є.

Згідно з розрахунками [11], ми розглядаємо сепарабельний метричний простір Гільберта $L_2[(a_2,b_2)\times(a_2,b_2)]$ двовимірних комплексних функцій $f(x_1,x_2)$ комплексних змінних x_1 і x_2 з квадратною мірою на прямокутнику $(a_2,b_2)\times(a_2,b_2)$, який інтегрується на цьому прямокутнику. Межі прямокутника можуть бути кінцевими або нескінченними. В якості основи простору ми можемо вибрати скінчену множину функцій $B_1=\{e_{1k},k=\overline{1,\infty}\}$ і $B_2=\{e_{2j},j=\overline{1,\infty}\}$, які пов’язані між собою

$$B=\{e_{1k}e_{1j},k=\overline{1,\infty},j=\overline{1,\infty}\} \qquad (1)$$

Основні функції можуть бути представлені у вигляді тригонометричних функцій

$$e_{nk}=(e^{ix_n})^k=e^{ikx_n},n=1,2 \qquad (2)$$

Довільну функцію розглянутого простору можна розкласти по базису як двовимірний узагальнений степеневий ряд виду

$$f=\sum_{k,p=1}^{\infty} a_{kp}(e_{11})^k(e_{21})^p \qquad (3)$$

де f – розклад в степеневий ряд, a_{kp} – коефіцієнти степеневого ряду, e_{nk} – експоненціальна функція.

В [10] ми запропонували визначення функціоналу типу Паде в наступному вигляді.

Визначення. Припустимо, що дано двовимірний степеневий ряд $S=\sum_{k,p=1}^{\infty} a_{kp}(x_1)^k(x_2)^p$ (S – розклад в степеневий ряд) комплексних змінних x_1 і x_2 і пов'язаної з ними апроксимації Паде $P[m_1,n_1/m_2,n_2](x_1,x_2)$ правильному розумінні. Функціонал Паде-типу $GP_{GS}[m_1,n_1/m_2,n_2](f_1,f_2)$ пов'язаний з даними узагальненим степеневим рядом $GS=\sum_{k,p=1}^{\infty} a_{kp}(f_1)^k(f_2)^p$ для комплексних функцій цих змінних визначається як

$$GP_{GS}[m_1,n_1/m_2,n_2]\left(f_1,f_2\right)=P[m_1,n_1/m_2,n_2](x_1,x_2)|_{x_1=f_1,x_2=f_2} \tag{4}$$

Процес побудови здійснюється у такій послідовності:

1. Обираються типи базисів для окремих змінних B_1,B_2 та основа простору B.
2. Апроксимація функції f представляється у вигляді (3).
3. Для степеневого ряду двох комплексних змінних x_1 і x_2 з коефіцієнтами, що збігаються, апроксимація Паде $P[m_1,n_1/m_2,n_2](x_1,x_2)$ побудована в правильному розумінні.
4. Робиться підстановка базисних функцій в функціонал Паде-типу.

Запропонована схема дозволяє визначити набір коефіцієнтів ряду, необхідний і достатній для побудови апроксимант Паде-типу із заданою структурою чисельника і знаменника.

В теорії наближення функцій дробово-раціональними апроксимаціями прийнято розглядати збіжність в сенсі теорем типу Монтессуса де Болора [9], які визначають ефективне аналітичне продовження мероморфної функція за радіусом збіжності. Тригонометрична функція є періодичною і в складній формі завжди належить одиничному колу.

Крім того, розглядаються кусково-гладкі інтегровані функції, що саме по собі мається на увазі відсутність особливих точок типу полюсів або по суті особливих точок. Доказ збіжності Паде-типу до значення самої функції в цьому випадку тривіально, оскільки базисні функції не мають особливих точок (за винятком степеневих функцій у нескінченності). Єдине обмеження - це випадок, коли особливі точки змінної, яка згодом замінюється тригонометричною функцією, лежать всередині одиничного кола.

Автори робіт по наближенням Фур'є-Паде в основному розглядають максимальне торкання тригонометричного полінома гладкої функції з постійно спадаючими коефіцієнтами і апроксимації Фур'є-Паде [11]. У цьому випадку продовження тригонометричних функцій не належить до одиничного кола. Крім того, вони розглядають голоморфні функції [5] без особливих точок.

В іншому випадку ми аналізуємо збіжність першого типу. Функції e_{nk} не мають особливих точок (за винятком степеневих функцій). Єдиний випадок, який потрібно дослідити, - це випадок, коли по суті особливі точки в змінній, яка згодом замінюється тригонометричною функцією, лежать всередині одиничного кола [5]. Оскільки в цьому випадку одновимірний ряд, що складається з коефіцієнтів a_{kp} розбігається відносно індексу цієї змінної, визначення цього випадку не складне.

При оцінці коефіцієнтів збіжності двовимірного апроксиматора до функції, що апроксимується за коефіцієнтами використовується значення швидкості зменшення коефіцієнтів вихідного ряду [3,6,12]. У разі побудови апроксимацій Паде $P[m_1,n_1/m_2,n_2](x_1,x_2)$ за схемою [1,6] використовуємо набори коефіцієнтів двовимірних рядів, які правильно перераховуються для монотонно зростаючого мінімуму розглянутих показників m_1, n_1, m_2 і n_2. На обмеженому прямокутнику $(a_2,b_2)\times(a_2,b_2)$, основні функції обох типів є функціями обмеженої варіації, тому швидкість спадання коефіцієнтів розкладення можна визначити методом [1].

Розглянемо етапи обробки зображення двовимірних сигналів.

Вхідне зображення розкладається на спектральні компоненти за допомогою дискретного косинусного або синусного перетворення [5].

Далі обираємо розмір області на цілочисельній решітці (рис. 1), з розміром якої безпосередньо пов'язана кількість рівнянь, які необхідно згенерувати. Для створення алгоритму автоматичного генерування системи рівнянь необхідно використовувати відповідну формулу. Для цього розглянемо узагальнену апроксимацію Паде відносно рядів з двома змінними, запропоноване Чисхолмом [13].

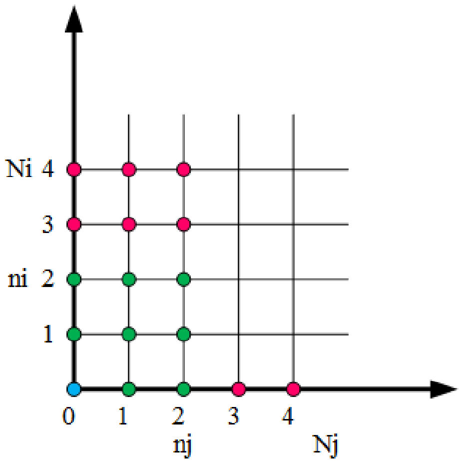

Рис. 1. Цілочисельна решітка для області ni, nj = 3

Якщо $f(x,y)$– функція двох змінних з фронтальним розкладанням в степеневий ряд виду

$$f(x,y)=\sum_{\alpha,\beta=0}^{\infty} a_{\alpha\beta}x^{\alpha}y^{\beta} \qquad (5)$$

то N - наближення Чисхолма записується у вигляді

$$f_{N,N}(x,y)=\frac{P_N(x,y)}{Q_N(x,y)}=\frac{\sum_{\mu}^{N}\sum_{\nu}^{N}c_{\mu\nu}x^{\mu}y^{\nu}}{\sum_{\sigma}^{N}\sum_{\tau}^{N}b_{\sigma\tau}x^{\sigma}y^{\tau}} \qquad (6)$$

Коефіцієнти $c_{\mu\nu}$ та $b_{\sigma\tau}$ ($c_{\mu\nu}$, $b_{\sigma\tau}$ – коефіцієнти ряду Чисхолма) визначаються з рівнянь

$$\sum_{\sigma=0}^{\gamma}\sum_{r=0}^{\delta} b_{\sigma r}a_{\gamma-\sigma,\delta-r}=c_{\gamma\delta}, \quad (\gamma,\delta=0,1,2,\ldots,2m; 1\le\gamma+\delta\le 2m) \qquad (7)$$

$$\sum_{\sigma=0}^{\gamma}\sum_{r=0}^{\delta}\left(b_{\sigma r}a_{\gamma-\sigma,\delta-r}+b_{r\sigma}a_{\delta-r,\gamma-\sigma}\right)=0, \quad (\gamma=1,2,\ldots,m; \gamma+\delta=2m+1) \qquad (8)$$

де a_{00}=1 [13] З рівняння була виведена формула:

$$\sum_{i=0}^{ni+1}\sum_{j=0}^{nj+1}\left(q_{i,j}a_{Ni-i,Nj-j}+q_{i,j}a_{Nj-j,Ni-i}\right)=0 \qquad (9)$$

Розв'язок даної системи рівнянь являє собою матрицю коефіцієнтів q.

Зробимо розрахунок коефіцієнтів p за знайденими коефіцієнтами q відповідно до виразу ($p_{g,d}$ – коефіцієнти апроксимації Паде):

$$p_{g,d}=\sum_{s=0}^{g}\sum_{r=0}^{d}\left(g_{s,r}\cdot a_{g-s,d-r}\right). \qquad (10)$$

Коефіцієнти p та q зберігаються до файлу.

Для відновлення зображення виконується реконструкція зображення: дві матриці коефіцієнтів p і q підставляються до формули:

$$SF(x,y)=0.5Re\left[\frac{\sum_{ii}^{ni}\sum_{jj}^{nj}\left[p_{ii,jj}(e^{ii\cdot 1ix}\cdot e^{jj\cdot 1jy})\right]}{\sum_{ii}^{ni}\sum_{jj}^{nj}\left[q_{ii,jj}(e^{ii\cdot 1ix}\cdot e^{jj\cdot 1jy})\right]}+\frac{\sum_{ii}^{ni}\sum_{jj}^{nj}\left[p_{ii,jj}(e^{ii\cdot 1ix}\cdot e^{-jj\cdot 1jy})\right]}{\sum_{ii}^{ni}\sum_{jj}^{nj}\left[c_{ii,jj}(e^{ii\cdot 1ix}\cdot e^{-jj\cdot 1jy})\right]}\right] \qquad (11)$$

Наш аналіз дає можливість зробити деякі висновки щодо практичного використання наближення Паде-типу та про його переваги.

Перш за все, ми можемо бачити низький рівень шуму для наближення Паде-типу в порівнянні з рядами Фур'є для синуса (рис. 2 (а) проти рис. 2 (б)) і косинуса (рис. 2 (в) проти рис. 2 (г)) випадків.

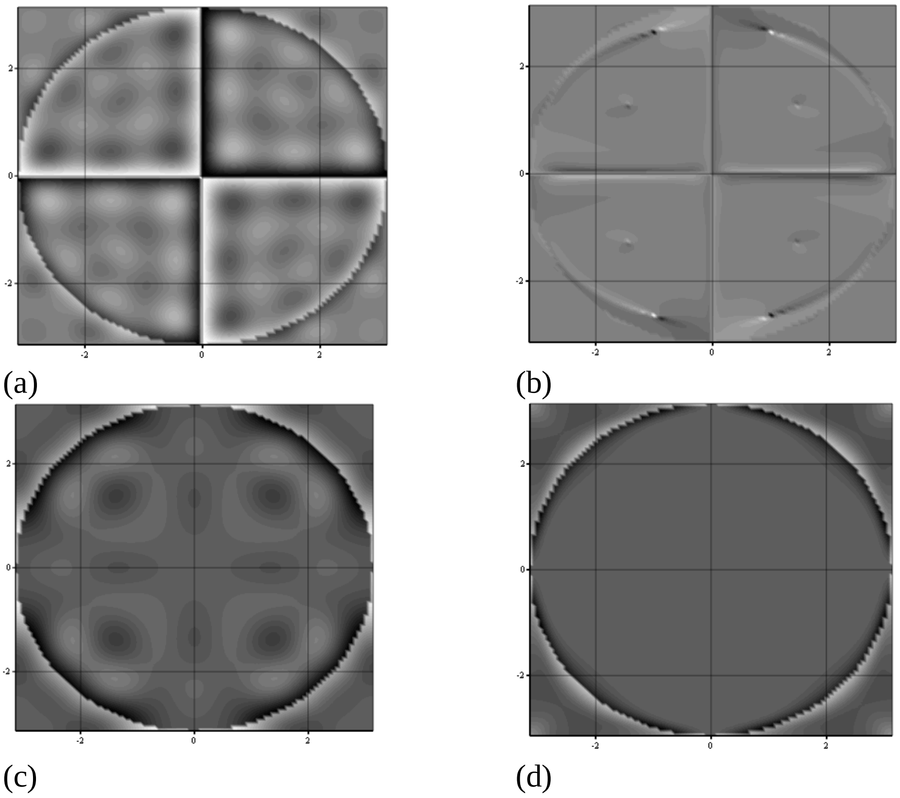

Рис. 2. Викривлення між шаблонними функціями і їх аппроксимацією для (a) синусоїдальних рядів Фур'є, (б) апроксимації Паде-типу для синусоїдальних рядів, (c) косинусних рядів Фур'є, (d) апроксимації Паде-типу для косинусних рядів.

По-друге, використання апроксимації Паде-типу призводить до різкого зменшення числа параметрів апроксимант без втрати точності (навіть з її ростом). Дійсно, коли ми використовуємо ряд Фур'є з рівним числом N гармонік в обох напрямках, ми отримуємо наступне число параметрів n_F:

$$n_F = N^2 \tag{12}$$

Використання апроксимант Паде-типу з рівними порядками чисельника і знаменника $N/2$ дає нам наступну кількість параметрів n_p:

$$n_p = 2\left(\frac{N}{2}\right)^2 - 1 = \frac{N^2}{2} - 1 \tag{13}$$

Таким чином, ми отримуємо зменшення кількості параметрів більш ніж удвічі:

$$\frac{n_F}{n_p} > 2 \tag{14}$$

Це дуже важливо для зберігання зображень при цифровій обробці сигналів і може дати нам теоретичну основу для створення нового ефективного формату зображення, такого як добре відомий формат JPEG (JPEG - Joint Photographic Experts Group).

Висновки

Запропоновано схему використання методу двовимірних аппроксимаций Паде-типу, що дає можливість зменшити феномен Гіббса для гармонійного двовимірного ряду Фур'є. Розглянуто застосування методу і його ефективність. Показана працездатність методики і можливість її застосування для підвищення точності розрахунків. Дослідження дає нам можливість зробити висновки про переваги практичного використання апроксимації Паде-типу для обробки зображень.

Список літератури

1. Timan A. F. Theory of approximation of functions of a real variable. New York: MacMillan, 1963. 631 p.

2. Mitra S. K. Digital Signal Processing. New York: McGraw-Hill, 2001. 866 p.

3. Olevska Yu. B., Olevskyi V. I., Shapka I. V. and Naumenko T. S. Application of two-dimensional Padé-type approximants for reducing the Gibbs phenomenon. *AIP Conference Proceedings*. 2019. URL: https://doi.org/10.1063/1.5130816

4. Veraart J., Fieremans E., Jelescu I. O. Gibbs ringing in diffusion MRI. *Magnetic Resonance in Medicine*. 2016. Vol.76, P.301-314. URL: https://doi:10.1002/mrm.25866

5. Andrianov I., Olevskyi V. and Olevska Yu. Analytic approximation of periodic Ateb functions via elementary functions in nonlinear dynamics. *8th International Conference for Promoting the Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences*. 2016. P. 040001-1–040001-7. URL: https://doi.org: 10.1063/1.4964964

6. Bazilevich Y.N. The Best Reduction of Matrices to Block-Triangular Form for Hierarchical Decomposition Problems. *Cybern Syst Anal*. 2017. URL: https://doi.org/10.1007/s10559-017-9947-1

7. Mossakovskii V. I., Mil'tsyn A. M., Olevskii V. I. Automating the analysis of results of a holographic experiment. *Strength of Materials*. 1994. No.26(5). P.385-391. URL:https://doi.org/10.1007/BF02207425

8. Drobakhin O. O. and Olevskyi O. V. Verification of applicability in space domain of the inverse filtering with evolution control for reconstruction of images obtained by radar scanning. *AIP Conference Proceedings*. 2018. URL:https://doi.org/10.1063/1.5007392

9. Baker J. and Graves-Morris P. Padé approximants. N. Y: Cambridge University Press, 1996, 746 p.

10. Andrianov I. V., Olevskyi V. I., Shapka I. V. Naumenko T. S. Technique of Padé-type multidimensional approximations application for solving some problems in mathematical physics. *AIP Conference Proceedings*. 2018. URL: https://doi.org/10.1063/1.5064886

11. Sablonniere P. Padé-Type Approximants for Multivariate Series of Functions. Lecture Notes in Mathematics, 1071. New York: Springer, 1984. pp. 238–251.

12. Olevskyi V. I. Asymptotic method of modeling of thin walled shells based on 2D Padé approximations. *6th International Conference for Promoting the Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences*. 2014. P. 110-126. URL: https://doi.org/10.1063/1.4902265

13. Chisholm S.R. Rational approximations determined from a double power series. Mathematics of Computing, 1973. No 27 (124) P.841–848. URL: https://doi.org/10.1090/S0025-5718-1973-0382928-6

І. В. Шапка, Т.С. Науменко

REDUCTION OF THE GIBBS PHENOMENON BY TWO-DIMENSIONAL APPROXIMATIONS

I. V. Shapka, T.S. Naumenko

Ukrainian State Chemical and Technological University
avg. Gagarina, 8, Dnipro, 49005, Ukraine, e-mail: irinaschapka@ukr.net

In this work, we propose and substantiate the expediency of using the Gibbs phenomenon. This phenomenon occurs at the edge of the function gap, for the analysis of which. The creation of a method of constructing such multidimensional approximations to the approximation and determination of the set of coefficients of the series necessary to construct an approximation of the given structure is considered. The conditions of convergence of approximants of approximate multidimensional functions constructed according to the developed method are determined. It is shown that in the calculations of two-dimensional approximations, the use of the Gibbs phenomenon makes it possible to significantly reduce the quality of image processing for most popular graphic standards, since they use a finite sum of harmonics. Image compression plays a very important role in many technological applications, such as document and medical imaging, television video conferencing, etc. Image compression methods are often divided into two categories: lossless and lossy. Lossless methods are usually chosen for applications where it is important to preserve very fine image details. These include medical and space research, remote sensing. On the other hand, lossy methods are used in situations where a significant degree of compression is required. This applies, for example, to digital photography, where, as a rule, the loss of some image details is not critical. Image compression methods are often divided into two categories: lossless and lossy. Lossless methods are usually chosen for applications where it is important to preserve very fine image details. These include medical and space research, remote sensing. On the other hand, lossy methods are used in situations where a significant degree of compression is required. This applies, for example, to digital photography, where, as a rule, the loss of some image details is not critical. When choosing a compression algorithm, it is important to understand its positive and negative sides. When choosing algorithms with the loss of part of the data, it is necessary to clearly understand under what conditions the image will lose the quality of human perception. This is due to the fact that blurring occurs at the borders of a sharp change in contrast and leads to the appearance of false optical shadows and poor-quality analysis when processing the results of radiological and sonar research. A two-dimensional Padé-type approximation method was developed, which reduces the Gibbs phenomenon for a harmonic two-dimensional Fourier series. This approach makes it possible to develop a method application scheme, an image processing algorithm and its effectiveness. Thanks to this, it becomes possible to optimize calculations and build a transformation algorithm.

Keywords: Padé approximation, Gibbs phenomenon, two-dimensional Fourier series, discrete cosine and sine transform.