DOI 10.15276/imms.v13.no1-2.97
УДК 519.972.5:004.942.001.57

Informatics and Mathematical Methods in Simulation
Vol.13 (2023), No. 1-2, pp. 97-103

РОЗРОБКА ТА ЧИСЛОВА РЕАЛІЗАЦІЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ГРАВІТАЦІЙНОЇ ХВИЛІ НА ГРАНИЦІ ПОДІЛУ ДВОШАРОВОЇ РІДИННОЇ СИСТЕМИ

Д. А. Лись, А. Ю. Прокофьєв

Національний університет «Одеська політехніка»,
Проспект Шевченка, 1, Одеса, 65044, Україна;E-mail:
loreal338@gmail.com, fallbrick1985@gmail.com

Хвильова динаміка двофазних систем — новий розділ механіки гетерогенних систем та теплофізики, який стрімко розвивається у останні роки. Дослідження у цій галузі потребують залучення сучасних результатів нелінійної хвильової динаміки, розробки нових способів врахування міжфазної взаємодії дослідження сучасних концепцій хвильових рухів (плинів), таких як «кінематичні хвилі», «динамічні хвилі» та «багато хвильові» системи. Складність фізичної постановки зазначених задач потребує відповідних адекватних математичних моделей (ММ) цих процесів, а також конструктивних методів числової реалізації створених ММ. Крім того, актуальність таких досліджень зумовлена тим, що двофазні потоки у переважній більшості виникають у робочих режимах в технологічних установках енергетичної, хімічної, металургійної та інших важливих галузях народного господарства. Робочі процеси в нафтодобувній та нафтопереробній промисловостях, в апаратах кріогенної техніки супроводжуються утворенням особливого типу двофазних систем — парорідинних сумішей. Відомо, що більшість двофазних систем характеризуються властивістю значного стискання (тобто швидкість звуку в такій системі мала), не лінійністю і тому для розрахунку динаміки таких середовищ, які рухаються з відносно невисокими швидкостями, необхідно застосування особливих газодинамічних методів. Також рух двофазних систем супроводжується процесами між фазного теплообміну , які спричиняють сильну дисипацію середовища, а інерційні властивості газових включень породжують залежність швидкості звуку від частоти — дисперсію швидкості звуку. Тому методи, та пов'язані з ними ММ традиційної парорідинної динаміки не відповідають специфіці двофазних потоків та дають незадовільні результати при розрахунках. Іншими словами, ці ММ та методи їх числової реалізації не є адекватними складним фізичним досліджуваним процесам. В чинній роботі поставлено задачу побудови конструктивних ММ гравітаційних хвиль, які утворюються на границі поділу фаз двошарової рідинної системи. Запропоновані ММ якісно відображають суть фізики динамічних процесів у двофазній рідинній системі і являють собою модельні канонічні рівняння, сформульовані в умовах прийнятих припущень щодо перебігу досліджуваних процесів. Проведені числові дослідження показали, що коректна формалізація особливостей фізичних явищ в рамках запропонованих моделей, дозволяє при постановці реальних прикладних експериментів з достатньої для інженерної практики розкрити природу закономірностей гідрогазодинамічних плинів.

Ключові слова: двофазна система; гравітаційна хвиля; двошарова рідинна система, математична модель; числовий експеримент.

Вступ. На практиці досить поширеним є випадок, коли рідинна система являє собою суміш рідин з відмінними фізико-хімічними властивостями, зокрема: з різними густинами, з різними температурами кипіння, з наявністю емульсованих домішок, з несхожою в'язкою (реологічною) поведінкою тощо. Типовими прикладами сумішей таких рідин можуть бути:

– природні рідкі вуглеводні, які складаються з фракцій з різними густинами та температурами кипіння;

– водо-оливні емульсії, які можуть, при зміні динамічного стану (швидкості плину), розділятися на рідини, що не змішуються та мають різні густини;

– колоїдні та полімерні розчини, складові яких мають різну реологічну поведінку, тобто виявляють характер «ньютонівської» (такої, що не стискається, чи, інакше, такої, для якої густина не залежить від швидкості плину) або «ненютонівської» (такої, що стискається, чи, інакше, такої, для якої густина залежить від швидкості плину) рідини.

При цьому зазначимо, що окремим явищем динаміки парорідинної двофазної системи слід розглядати наявність у її рідинній складові двох шарів рідин з різними фізико-хімічними властивостями. Специфіка плину таких парорідинних двофазних систем полягає [1, 2] у наявності вільної границі, на якій може відбуватися розвиток нестійкості та хвилеутворення, а також процеси теплообміну та тертя з паровою фазою.

Мета роботи. Мета роботи полягає у розробці конструктивних математичних моделей (ММ) гравітаційних хвиль, що утворюються на границі поділу окремих фаз двошарової рідинної системи та доведення адекватності даних ММ шляхом числового дослідження.

Основна частина. Розглянемо розповсюдження гравітаційних хвиль на границі поділу двох шарів рідин різної густини ($\rho_1 < \rho_2$), які не змішуються, за умов для двофазної рідинної системи: обмеження знизу горизонтальним дном, а з верху — наявності вільної границі. Уявімо, що хвилі є *довгими* та мають *малу* амплітуду. Відзначимо, що задача, яка розглядається, не тільки має важливі технічні за стосунки, але і є найпростішою моделлю океану, що враховує стратифікацію. Тобто можна говорити про технічну та загально природну *актуальність* задачі, яка розглядається. Зазначимо, що така двошарова модель містить дві моди коливань — *бароклинну* та *баротропну*. Баротропна мода — швидка, яка відповідає коливанням системи як цілого або синхронним коливанням двох шарів; бароклинна мода — повільна, та відповідає коливанням шарів, зсунутих по фазі на π. Певний досвід із розв’язання подібних задач описано в роботах [3, 4].

Запишемо рівняння нерозривності та x-компоненти рівнянь руху для всієї системи загалом і окремо для нижнього шару:

$$\frac{\partial\left(\langle\rho\rangle\,\delta\right)}{\partial t}+\frac{\partial\left(\langle u\rangle\langle\rho\rangle\,\delta\right)}{\partial x}=0;\quad \frac{\partial\delta_2}{\partial t}+\frac{\partial\left(\langle u_2\rangle\right)\delta_2}{\partial x}=0; \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\left(\langle u\rangle\langle\rho\rangle\,\delta\right)}{\partial t}+\rho_1\frac{\partial\left(\langle u_1^2\rangle\,\delta_1\right)}{\partial x}+\rho_2\frac{\partial\left(\langle u_2^2\rangle\,\delta_2\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(\langle P\rangle\,\delta\right)}{\partial x}=0;\\ &\frac{\partial\left(\langle u_2\rangle\,\delta_2\right)}{\partial t}+\frac{\partial\left(\langle u_2^2\rangle\,\delta_2\right)}{\partial x}+\frac{1}{\rho_2}\left[\frac{\partial\left(\langle P_2\rangle\,\delta_2\right)}{\partial x}-P_{\text{г}}\frac{\partial\delta_2}{\partial x}\right]=0.\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

тут δ — загальна глибина двох шарів рідини; $P_{\text{г}}$ — тиск на границі двох рідин; u — середня швидкість хвилі для двофазної рідинної системи; P — середнє значення тиску для двофазної рідинної системи; індексом 1 відмічено величини, які відносяться до верхньої рідини, а індексом 2 — до нижньої. В’язкості рідин не враховуються.

Після диференціювання рівнянь (1) за часом, а рівнянь (2) — по координаті x, їх різниця запишеться наступним чином:

$$\frac{\partial^2(\langle\rho\rangle\delta)}{\partial t^2}-\rho_1\frac{\partial^2\left(\left\langle u_1^2\right\rangle\delta_1\right)}{\partial x^2}-\rho_2\frac{\partial^2\left(\left\langle u_2^2\right\rangle\delta_2\right)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\left(\langle P\rangle\delta_2\right)}{\partial x^2}=0;$$
$$\frac{\partial^2\delta_2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\left(\left\langle u_2^2\right\rangle\delta_2\right)}{\partial x^2}-\frac{1}{\rho_2}\left[\frac{\partial^2\left(\langle P_2\rangle\delta_2\right)}{\partial x^2}-\frac{\partial}{\partial x}\left(P_\text{г}\frac{\partial\delta_2}{\partial x}\right)\right]=0. \tag{3}$$

Наближення довгих хвиль дозволяє вважати, що профіль горизонтальної складової швидкості рідини є «заповненим», тобто не залежить від координати y, а профіль вертикальної складової — лінійним:

$$v_1=\frac{y-\delta_2}{\delta_1}\left(\frac{\partial\delta}{\partial t}-\frac{\partial\delta_2}{\partial t}\right)+\frac{\partial\delta_2}{\partial t};\ v_2=\frac{y}{\delta_2}\frac{\partial\delta_2}{\partial t}.$$

Підстановка цих виразів в y-компоненти рівнянь руху верхньої та нижньої рідин $\frac{\partial v_1}{\partial t}+\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial P_1}{\partial y}+g=0$; $\frac{\partial v_2}{\partial t}+\frac{1}{\rho_2}\frac{\partial P_2}{\partial y}+g=0$ разом з граничними умовами $P_1=0$ при $y=\delta$ та $P_1=P_2=P_\text{г}$ при $y=\delta_2$ дає можливість виразити середні значення тиску через глибини шарів.

Спочатку розглянемо «швидку» моду. Малість амплітуди збуджень дозволяє у квадратичних членах рівнянь (3) покласти з точністю до членів другого порядку малості $\left\langle u_1^2\right\rangle=\left[c_1^0(\delta'-\delta_2')/\delta_1^0\right]$, $\left\langle u_2^2\right\rangle=\left(c_1^0\delta_2'/\delta_2^0\right)^2$, де $\delta'=\delta-\delta_0$, δ_0 — рівно вагове значення глибини, а c_1^0 — граничне довгохвильове значення швидкості розповсюдження безкінечно малих збуджень швидкої моди:

$$\left(c_1^0\right)^2=g\delta^0\left[1+\sqrt{1-4\left(\delta_2^0/\delta^0\right)\left(1-\delta_2^0/\delta^0\right)\Delta\bar\rho}\right]/2,$$
$$\Delta\bar\rho=1-\bar\rho;\ \bar\rho=\rho_1/\rho_2.$$

В результаті рівняння (3) можна перетворити до вигляду

$$\frac{\partial^2\delta}{\partial t^2}-g\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\left(\delta^0-\Delta\bar\rho\delta_2^0\right)\delta+\Delta\bar\rho\delta_2^0\delta_2\right]-\left(c_1^0\right)^2\left[\frac{(\delta'-\delta_2')^2}{\delta_1^0}+\frac{(\delta_2')^2}{\delta_2^0}\right]-$$
$$-g\frac{\partial}{\partial x}\left[\delta'\frac{\partial\delta}{\partial x}-\Delta\bar\rho\delta_2'\frac{\partial(\delta-\delta_2)}{\partial x}\right]-\left[\frac{\left(\delta_1^0\right)^2}{3}+\bar\rho\frac{\delta_1^0\delta_2^0}{2}\right]\times$$
$$\times\frac{\partial^4\delta_2}{\partial t^2\,\partial x^2}\left\{1-\left[\frac{\left(\delta_1^0\right)^2}{6}+\frac{\left(\delta_1^0\right)^2}{3}+\bar\rho\frac{\delta_1^0\delta_2^0}{2}\right]\right\}=0;$$

$$\frac{\partial^2\delta_2}{\partial t^2}-g\delta_2^0\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\bar\rho\delta-\Delta\bar\rho\delta_2\right)-\left(c_1^0\right)^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{(\delta_2')^2}{\delta_2^0}\right]-g\frac{\partial}{\partial x}\left[\delta_2'\frac{\partial}{\partial x}\left(\bar\rho\delta+\Delta\bar\rho\delta_2\right)\right]-$$
$$-\bar\rho\frac{\delta_1^0\delta_2^0}{2}\frac{\partial^4(\delta+\delta_2)}{\partial t^2\,\partial x^2}-\frac{\left(\delta_2^0\right)^2}{3}\frac{\partial^4\delta_2}{\partial t^2\,\partial x^2}=0. \tag{4}$$

Таким чином, для швидкої моди систему рівнянь гідродинаміки вдалося звести до двох рівнянь хвильового типу, які враховують нелінійність збуджень та інерцію шарів рідини. Одначе, в силу складності рівнянь (4), віднайти аналітичний розв'язок даної системи не є можливим. В такій задачі виявляється плідним узагальнення «простих» та «квазіпростих» хвиль, викладене в роботах [5 — 7]. Традиційно поняття простих» та «квазіпростих» хвиль застосовується до систем рівнянь газової динаміки, що являють собою диференційні рівняння першого порядку. Рівняння (4) мають більш високий порядок. Одначе, дотримуючись ідеям Рімана та Карпмана [8], зробимо додаткові припущення, які полягають в тому, що між збудженнями вільної та внутрішньої границь існує наступний зв'язок:

$$\delta_2' = f_1(\delta') + f_1'(\delta'). \tag{5}$$

Тут $f_1(\delta')$ — розв'язок системи рівнянь (5.73) без нелінійних та дисперсійних членів, тобто

$$f_1(\delta') = f_1^0\delta' = \left\{1 - \left[\delta^0/\delta_2^0 - \left(c_1^0\right)^2/\left(g\delta_2^0\right)\right]\Delta\overline{\rho}^{-1}\right\}\delta',$$

а функція $f_1'(\delta')$ має другий порядок малості, оскільки пропорційна нелінійним та дисперсійним членам. Для віднаходження функції $f_1'(\delta')$ необхідно підставити вираз (5) в рівняння (4), знехтувати членами третього порядку малості та вважати, що $\partial^2[f_1'(\delta')]/\partial t^2 \approx \left(c_1^0\right)^2 \partial^2[f_1'(\delta')]/\partial x^2$. У підсумку перше з рівнянь (5.73) приймає вид модифікованого рівняння Буссінеска

$$\frac{\partial^2\delta}{\partial t^2} - \left(c_1^0\right)^2\frac{\partial^2\delta}{\partial x^2} - \alpha_1\frac{\partial^2(\delta')^2}{\partial x^2} - \beta_1\frac{\partial^4\delta}{\partial t^2\,\partial x^2} = 0, \tag{6}$$

де коефіцієнти при нелінійному і дисперсійному членах є константами та

визначаються формулами

$$\alpha_1 = g\left[f_1^0 + q_1\Delta\overline{\rho}\left(1 - f_1^0\right)\right]/2 + \left(c_1^0\right)^2\left[q_1/\delta_2^0 + r_1\left(1 - f_1^0\right)/\delta_1^0\right];$$

$$\beta_1 = q_1\left[\left(\delta_2^0\right)^2/3 + \overline{\rho}\delta_1^0\delta_2^0\left(1 + f_1^0\right)/2\right] + r_1\left\{\left(\delta_1^0\right)^2\left(1/2 + f_1^0\right)/\left[3\left(1 - f_1^0\right)\right]\right\};$$

$$q_1 = 1 + r_1;\; r_1 = g\,\delta_2^0\overline{\rho}\left(1 - f_1^0\right)/\left[2\left(c_2^0\right)^2 - g\delta^0\right];$$

$$f_1^0 = 1 + \left[\left(c_2^0\right)^2/\left(g\delta_2^0\right) - 1\right]/\overline{\rho}.$$

Розглянемо тепер «повільну» моду, для якої з точністю до членів другого порядку малості $\left\langle u_1^2\right\rangle = \left[c_2^0\,(\delta - \delta_2')/\delta_1^0\right]^2$, а $\left\langle u_2^2\right\rangle = \left(c_2^0\delta_2'/\delta_2^0\right)^2$. Тут $c_2^0 = \sqrt{g\delta^0 - \left(c_2^0\right)^2}$ — граничне довгохвильове значення швидкості розповсюдження безкінечно малих збуджень «повільної» моди. Подібно тому, як це було зроблено для «швидкої» моди, отримаємо наступне рівняння:

$$\frac{\partial^2\delta_2}{\partial t^2} - \left(c_2^0\right)^2\frac{\partial^2\delta_2}{\partial x^2} - \alpha_2\frac{\partial^2(\delta_2')^2}{\partial x^2} - \beta_2\frac{\partial^4\delta_2}{\partial t^2\,\partial x^2} = 0, \tag{7}$$

де

$$\alpha_2 = g\left[f_2^0 + q_2\Delta\overline{\rho}\left(1 - f_2^0\right)\right]/2 + \left(c_2^0\right)^2\left[q_2/\delta_2^0 + r_2\left(1 - f_2^0\right)/\delta_2^0\right];$$

$$\beta_2 = q_2\left[\left(\delta_2^0\right)^2/3 + \bar{\rho}\delta_1^0\delta_2^0\left(1+f_2^0\right)/2\right] + r_2\left\{\left(\delta_2^0\right)^2\left(1/2+f_2^0\right)/\left[3\left(1-f_2^0\right)\right]\right\};$$

$$q_2 = 1 + r_2;\ r_2 = g\,\delta_2^0\bar{\rho}\left(1-f_2^0\right)/\left[2\left(c_2^0\right)^2 - g\delta^0\right];$$

$$f_2^0 = 1 + \left[\left(c_2^0\right)^2/\left(g\delta_2^0\right) - 1\right]/\bar{\rho}\ .$$

Рівняння (6) та (7) мають стаціонарні розв'язки у вигляді рівнянь хвиль, зокрема, аналогічно роботі [9].

Випишемо розв'язок для усамітненої хвилі «повільної» моди на границі розділу двошарової рідини:

$$\delta_2 = \delta_2^0 + \Delta\delta_2 \operatorname{sch}^2\left(\frac{x - V_2 t}{l_2}\right);$$

$$V_2 = c_2^0\sqrt{1 + \frac{2\alpha_2\Delta\delta_2}{3\left(c_2^0\right)^2}};\ l_2 = \sqrt{\frac{6\beta_2 U_2^2}{\alpha_2\Delta\delta_2}}\ . \qquad (8)$$

При $\alpha_2 < 0$ та $\beta_2 > 0$ має місце усамітнена хвиля типи «впадина» ($\delta_2' < 0$). Очевидно, що з рівнянь (6) та (7) можна отримати еволюційні рівняння, перейшовши до розгляду хвиль, які розповсюджуються у один бік. Так, для збудження границі двошарової рідини з (7) випливає еволюційне рівняння типу Кортевега — де Вріза

$$\frac{\partial\delta_2}{\partial t} + c_2^0\frac{\partial\delta_2}{\partial x} - \alpha_2\frac{\delta_2'}{c_2^0}\frac{\partial\delta_2}{\partial x} + \frac{c_2^0}{2}\beta_2\frac{\partial^3\delta_2}{\partial x^3} = 0, \qquad (9)$$

Рівняння (9) має солітонний (у вигляді скупчень хвиль) розв'язок виду (8), одначе тут швидкість $V_2 = c_2^0 + \dfrac{\alpha_2\Delta\delta_2^0}{3c_2^0}$ та ширина $l_2 = \sqrt{\dfrac{6\beta_2 c_2^0}{\alpha_2\Delta\delta_2}}$. Таким чином, швидкість соліона хвильового рівняння менше за швидкість усамітненого збудження еволюційного рівняння (при одних і тих самих амплітудах), а ширина, навпаки, більше.

Проведене числове дослідження (рис. 1, *а*, *б*) де $\bar{V}_2 = V_2/c_2^0$; $\Delta\bar{\delta}_2 = \Delta\delta_2/\delta_2^0$; $\bar{x}_2 = x/\delta_2^0$ показало хороше співпадіння з експериментальними даними [10]. Видно, що розв'язок хвильового рівняння краще узгоджується з експериментальними точками, ніж розв'язок «усамітненої» хвилі, отриманого з відповідного еволюційного рівняння.

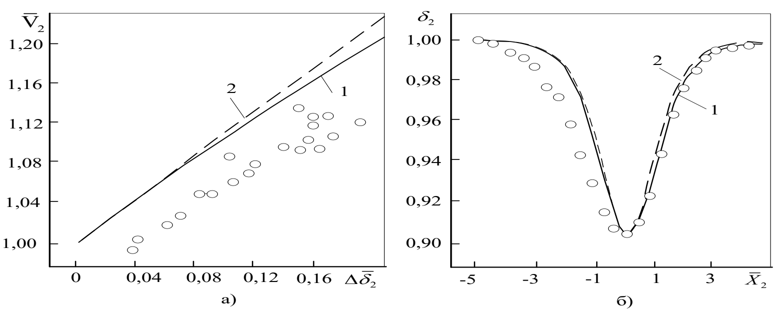

Рис. 1. Залежність швидкості солітонів від їх амплітуд (*а*) і форма одного з усамітнених збуджень (*б*) при $\bar{\rho} = 0{,}8$ та $\delta_1^0/\delta_2^0 = 0{,}36$

1 — розрахунок по модифікованому рівнянню Буссінеска (5.76);
2 — розрахунок по рівнянню Кортевега — де Вріза (5.78)

Для перевірки правомірності застосування техніки «кваліпростих» хвиль до системи хвильових рівнянь порівняємо дисперсійні криві системи лінеаризованих рівнянь (4), (6) та аналогічних рівнянь для «повільної» моди. На рис. 2, *а*, *б* наведено результати розрахунків для $\bar{\rho} = 0{,}8$ та $\delta_1^0 / \delta_2^0 = 0{,}36$. Фазові швидкості $\bar{c}_1 = c_1 / c_1^0$; $\bar{c}_2 = c_2 / c_2^0$; хвильові числа $\bar{k}_1 = k\delta_1^0$; $\bar{k}_2 = k\delta_2^0$. Видно, що дисперсійні криві практично співпадають у широкому інтервалі довжин хвиль.

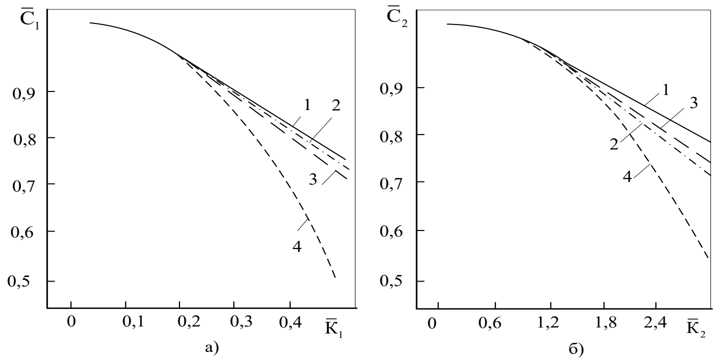

Рис. 2. Залежність фазової швидкості «швидкої» (*а*) та «повільної» (*б*) мод хвильового числа:

1 — точний розв'язок повної лінійної задачі; 2 — розрахунок за формулою (5.73); 3 — розрахунок за формулами (5.75) та (5.76); розрахунок за формулою (5.78)

Крім того, поведінка фазових швидкостей, віднайдена з отриманих вище рівнянь, слабко відрізняється від точного розв'язку повної лінійної задачі.

Наявність тертя рідин об дно призводить до того, що в модифікованому рівнянні Буссінеска виду (6) з'являється додатковий дисипативний член типу інтегралу Дюамеля [11]. В результаті швидкість розповсюдження гравітаційних хвиль зменшується, а ширина солітонів — збільшується.

Висновки. На основі рівняння нерозривності та рівнянь руху для двофазної рідинної системи, що перебуває у нестаціонарному стані, отримано ММ гравітаційної хвилі на границі поділу компонент двошарової структури, причому остання визначається різницею густин рідин, які її утворюють. ММ гравітаційної хвилі отримано у вигляді модифікованого рівняння Буссінеска, яке відрізняється від класичного меншим порядком, одначе відбиває всі якісні властивості фізичної картини явищ хвиле утворення.

Проведені числові дослідження запропонованої ММ гравітаційного хвилеутворення для двошарової рідинної системи, яка не змішується, показали її зручність при розв'язуванні практичних задач, а також цілком придатну точність (з похибкою, що не перевищує $(3...5)\%$ у порівнянні з натурними експериментами) для інженерних розрахунків.

Список літератури

1. Yang Z., Xu D., Xiang L. Exponential p-stability of impulsive stochastic differential equations with delays. *Phys. Lett*. 2016. A 359. P.129–137.
2. Wang J., Anisimov M.A. Nature of vapor-liquid asymmetry in fluid criticality. *Phys. Rev*. 2007. E75. P. 58-72.
3. Krasnov G. Air bubble movement in pulsating liquid. *Journal of Mining Science*. 2006. V. 42, №. 5. P. 500–505.
4. Yukhnovskii I. R. Phase Transitions in a Vicinity of the Vapor-Liquid Critical Point *Ukrainian Journal of Physics*. 2019. V.10(1), №33. URL: https://ujp.bitp.kiev.ua/index.php/ujp/article/view/2019662

5. Константінов Ю.М., Гіжа О.О. Технічна механіка рідини і газу. К.: Вища школа, 2002. 277 с.
6. Chorin A.J., Marsden J.E. A mathematical introduction to fluid mechanics [New York: Springer-Verlag, 2000. 169 p.
7. Pozrikidis C. Fluid dynamics: theory, computation, and numerical simulation. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2001. 685 p.
8. Shaughnessy E.J., Shaughnessy J., Ira M., Katz J.P. Schaffer Introduction to fluid mechanics. New York, Oxford: Oxford University Press, 2005. P. 1018-1026.
9. Митько Л.О. Положаєнко С.А., Сєрбов М.Г. Моделювання процесу хвилеутворення при донних зрушеннях в мілководих акваторіях. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки.* Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільськ. нац. ун-т, 2009. Вип. 2. С. 95-104.
10. Марценюк О.С., Немирович П.М., Віценко О.М., Пастушенко І.М. Методика гідравлічного розрахунку газорідинних циркуляційних труб. *Наукові праці НУХТ*. 2012. № 44. С. 44–50.
11. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1977. 831с.

DEVELOPMENT AND NUMERICAL IMPLEMENTATION OF THE MATHEMATICAL MODEL OF A GRAVITY WAVE AT THE BOUNDARY OF SEPARATION OF A TWO-LAYER LIQUID SYSTEM

D.A. Lys, A.Yu. Prokofiev

National Odesa Polytechnic University, Shevchenko str., 1, Odesa, 65044, Ukraine
loreal338@gmail.com, fallbrick1985@gmail.com

Wave dynamics of two-phase systems is a new branch of the mechanics of heterogeneous systems and thermal physics, which has been developing rapidly in recent years. Research in this field requires the involvement of modern results of nonlinear wave dynamics, the development of new ways of taking into account interphase interaction, the study of modern concepts of wave movements (flows), such as «kinematic waves», «dynamic waves» and «multi-wave» systems. The complexity of the physical formulation of these problems requires appropriate and adequate mathematical models (MM) of these processes, as well as constructive methods of numerical implementation of the created MM. In addition, the relevance of such studies is due to the fact that two-phase flows in the vast majority occur in operating modes in technological installations of energy, chemical, metallurgical and other important sectors of the national economy. Work processes in the oil-mining and oil-refining industries, in cryogenic equipment are accompanied by the formation of a special type of two-phase systems - vapor-liquid mixtures. It is known that most two-phase systems are characterized by the property of significant compression (that is, the speed of sound in such a system is low), not by linearity, and therefore to calculate the dynamics of such media that move at relatively low speeds, it is necessary to use special gas-dynamic methods. Also, the movement of two-phase systems is accompanied by interphase heat exchange processes, which cause strong dissipation of the medium, and the inertial properties of gas inclusions give rise to the dependence of the speed of sound on the frequency - the dispersion of the sound speed. Therefore, the methods and associated MM of traditional vapor-liquid dynamics do not meet the specifics of two-phase flows and give unsatisfactory results in calculations. In other words, these MM and methods of their numerical implementation are not adequate to the complex physical processes under study. In the current work, the task of constructing constructive MM gravity waves, which are formed at the phase separation boundary of a two-layer liquid system, is set. The proposed MM qualitatively reflect the essence of the physics of dynamic processes in a two-phase liquid system and represent model canonical equations formulated under the conditions of accepted assumptions regarding the course of the studied processes. The conducted numerical studies showed that the correct formalization of the features of physical phenomena within the framework of the proposed models allows revealing the nature of the regularities of hydro-gas-dynamic flows when setting up real applied experiments with sufficient engineering practice.
Keywords: two-phase system; gravitational wave; two-layer liquid system, mathematical model; numerical experiment.