DOI 10.15276/imms.v13.no1-2.144
УДК 004.56.5(043.2)

Informatics and Mathematical Methods in Simulation
Vol.13 (2023), No. 1-2, pp.144-161

ОЦІНКА ВЛАСТИВОСТЕЙ ІНФОРМАЦІЙНИХ ВТОРГНЕНЬ

В.О.Хорошко, В.Д.Козюра, Ю.Є.Хохлачова, Н.С.Вишневська

Національний авіаційний університет,
1, просп. Любомира Гузара, Київ, 03058, Україна,
e-mail: professor_va@ukr.net

У статті запропонована оцінка властивостей інформаційних вторгнень, оскільки вони являють собою випадкові процеси і мають свої властивості. Це дозволяє з'ясувати рівень впливу їх на особистість чи групу людей, і розробити ефективну систему протидії. При цьому психологічний вплив або інформаційне вторгнення, що є складовою інформаційно-психологічного протиборства, - це вплив на людей та їх групи, що здійснюється з метою зміни ідеологічних та психологічних структур їх свідомості та підсвідомості, трансформації емоційних станів, стимулювання певних типів поведінки. Перебудова психіки під впливом інформаційно-психологічного впливу може бути різною, як у широті, так і по тимчасовій стійкості. Для того, щоб надати інформаційне вторгнення та психологічний вплив, необхідно спочатку спровокувати збої та перенесення впливів. Динамічна рівновага між ними порушується, людина починає переживати стан когнітивного дисонансу. Після цього можна спонукати до відновлення душевної рівноваги за рахунок зміни своїх колишніх звичних йому поглядів, переконань і відносин, табу і стереотипів поведінки. Тому дуже важливо оцінювати властивості інформаційних вторгнень чи психологічних впливів, що дозволяють з'ясувати рівень впливу їх на особистість чи групу людей, і розробити ефективну систему протидії. Показано, що для їх аналізу можна використовувати всі ті методи, які використовуються для оцінки та аналізу випадкових процесів. Також було проведено розгляд завдання виявлення стрибкоподібних сплесків, який показав, що за допомогою таких сигналів спостереження можуть бути диференційовані.
Ключові слова: кібербезпека, кіберпростір, інформаційне протиборство, інформаційно-психологічне протиборство, інформаційні вторгнення, математичні методи.

Вступ. Інформаційне протиборство – це поєднання теоретичних знань, практичних спеціальних методів та технологій. При цьому потенціал впливу інформаційно-психологічного протиборства величезний. Це обумовлено самою його суттю.

З часом неконтрольоване поширення та використання інформаційного та кіберпростору, разом з отриманням значних переваг від їх використання призвело і до виникнення нових принципів, пов'язаних з цими проблемами. Головною з них стало різке загострення міжнародної конкуренції за володіння інформаційними ресурсами та інформаційним ринком. При цьому задля забезпечення інформаційного протистояння та проведення окремих операцій під час локальних війн та збройних конфліктів сучасності.

У цьому досить активно почали використовувати можливості інформаційної магістралі, як Internet. Яскравим прикладом стали події в Ірані, Югославії, Лівії, Чечні, Грузії, Україні і тощо [1].

При цьому психологічний вплив або інформаційне вторгнення, що є складовою інформаційно-психологічного протиборства, це вплив на людей та їх групи, що здійснюється з метою зміни ідеологічних та психологічних структур їх свідомості та підсвідомості, трансформації емоційних станів, стимулювання певних типів поведінки [1].

Перебудова психіки під впливом інформаційно-психологічного впливу може бути різною, як у широті, так і по тимчасовій стійкості. За першим критерієм розрізняють парціальні зміни, тобто зміни якоїсь однієї психологічної якості, та загальні зміни психіки, тобто зміни низки психологічних аспектів індивіда. По другому зміни можуть бути короткочасними та тривалими.

Психологічний вплив (інформаційне вторгнення) має закономірності [3]:

- якщо вплив спрямований насамперед на споживчо-мотиваційну сферу людей, тоді його результати позначаються, насамперед, на спрямованості і силі спонукань людей;
- поєднання впливів на обидві названі сфери дозволяє впливати на вольову активність людей і таким чином керувати їхньою поведінкою;
- вплив на комунікативно-поведінкову сферу (специфіку взаємодій та спілкування) дозволяє створити соціально-психологічний комфорт/дискомфорт, змушує людей співпрацювати або конфліктувати з оточуючими;
- в результаті інформаційного вторгнення (психологічного впливу) на інтелектуально-пізнавальну сферу людини змінюються в потрібний бік її подання, характер сприйняття інформації, що надходить, і, в результаті, її «картина світу».

Відповідно до сказаного, для того, щоб надати інформаційне вторгнення та психологічний вплив, необхідно спочатку спровокувати збої та перенесення впливів. Динамічна рівновага між ними порушується, людина починає переживати стан когнітивного дисонансу. Після цього можна спонукати до відновлення душевної рівноваги за рахунок зміни своїх колишніх звичних йому поглядів, переконань і відносин, табу і стереотипів поведінки.

Тому дуже важливо оцінювати властивості інформаційних вторгнень чи психологічних впливів, що дозволяють з'ясувати рівень впливу їх на особистість чи групу людей, і навіть розробити ефективну систему протидії.

Метою роботи є оцінка властивостей інформаційних вторгнень. Оскільки інформаційні вторгнення являють собою випадкові процеси і мають їхні властивості, то для аналізу можна використовувати всі ті методи, які використовуються для оцінки та аналізу випадкових процесів.

Основна частина. Завдання виявлення зміни властивостей інформаційних вторгнень (ІВ) дуже важливе для протидії їх впливу на людину, групу людей і суспільство в цілому. Також ІВ являють собою випадкові процеси і мають їхні властивості, тому для їх аналізу можна використовувати всі ті методи, які використовуються для оцінки та аналізу випадкових процесів [4-7].

У роботах [14, 15] розглядається завдання виявлення стрибкоподібних сплесків, припущення, що вони рано чи пізно відбудуться. Проте, з допомогою таких сигналів спостереження можуть бути диференційовані. Ці обставини необхідно враховувати під час побудови алгоритмів виявлення. Якщо задано максимально допустимий час спостереження, то для виявлення ІВ можна використовувати непослідовні і послідовні алгоритми.

У першому випадку рішення про наявність чи відсутність ІВ приймається на основі всього доступного набору спостережень. Для прискорення виявлення ІВ можна використовувати послідовні методи, що ґрунтуються на випадковому числі спостережень [4, 5, 6]. Основна відмінність алгоритмів виявлення ІВ від класичних алгоритмів перевірки гіпотез полягає в тому, що рішення про відсутність вторгнення може бути прийнято лише на останньому доступному кроці спостереження, оскільки ніколи немає гарантії, що воно відбудеться після закінчення спостережень. Розглянуті у статті завдання є окремим випадком більш загального виявлення [8].

Припустимо, що з кроками з номерами $n=\overline{1,N}$, де N – максимально можливе число кроків спостереження, доступні спостереженню, взагалі кажучи, векторні випадкові величини $x_n \in X_n$. Передбачається, що можуть виникнути дві ситуації $\theta = 0$ та $\theta = 1$, причому подія $\{\theta = 1\}$ означає зміну імовірнісних властивостей послідовності $\{x_n, n \geq 1\}$, що відбувається у випадковий момент $\lambda_o \in [0, \infty)$ Подія $\{\lambda_o = \infty\}$ еквівалентна відсутності ІВ і має ненульову ймовірність, тобто $P(\lambda_0 = \infty) = P(\theta = 0) = \Pi_{00} \in (0,1)$. Вважатимемо заданими апріорні ймовірності наявності $\Pi_{01} = P(\theta = 1) = P\left(\lambda_0 \in [0, \infty]\right]$ і відсутність Π_{00} вторгнення $(\Pi_{00} = 1 - \Pi_{01})$ та умовний апріорний розподіл моменту появи $\Pi(\lambda) = P(\lambda_0) \leq \lambda[\theta - 1) = P_1(\lambda_0 \leq \lambda)$, $\lambda \geq 0$.

Нехай умовні щільності векторів $x^n, n \geq 1$, має вигляд:

$$p_0(x_1^n) = p(x_1^n \mid \theta = 0) = \prod_{i=1}^{n} p_{0i}(x_i) = p(x_1^n \mid \theta = 1, \lambda_0 > n\Delta); \tag{1}$$

$$p_1(x_1^n \mid \lambda) = p(x_1^n \mid \theta = 1, \lambda_0 > \lambda) = \prod_{i=1}^{j} p_{0i}(x_i) p_{\lambda j+1}(x_{j+1}) \prod_{i=j+2}^{n} P_{1i}(x_i), \tag{2}$$

$$j\Delta \leq \lambda \leq (j+1)\Delta, \; j \leq n-1, \; n = \overline{1, n},$$

де $p_{\lambda n}(x_n)$ – щільність, що залежить від λ, причому

$$P_{\lambda n}(x_n) = \begin{cases} P_{0n}(x_n) \text{ при } \lambda = n\Delta, \\ P_{0n}(x_n) \text{ при } \lambda = (n-1)\Delta \end{cases} \tag{3}$$

Таким чином до моменту вторгнення спостереження x_n, $n = 1, 2, 3, ...$ незалежні із щільностями p_{0n}, а після вторгнення у встановленому режимі – незалежні із щільностями p_{1n}. Залежність щільності $p_{\lambda n}$ обумовлена поступовістю ІВ, причому передбачається , що режим, що встановився, настає не пізніше ніж через час Δ, що дорівнює інтервалу часу між відліками (тобто, за один крок).

Введемо функцію втрат наступним чином

$$g(\theta, \lambda, u_n, n) = \begin{cases} g_{01}(n), \theta = 0, u_n = 1, \\ g_{11}(n) + c \cdot (n - [\lambda]), \theta = 1, \lambda < n\Delta, u_n = 1, \\ \tilde{g}_{11}(n), \theta = 1, \lambda < n\Delta, u_n = 1, n = \overline{1, n}, \end{cases} \tag{4}$$

де $u_n = 1$ – рішення про наявність ІВ на n-м кроці; c – вартість затримки у винесенні рішення про наявність вторгнення на один крок; $[\lambda] = n - 1$ при $(n-1)\Delta \leq \lambda \leq n\Delta$.

Рішення $u_n = 0$ про відсутність ІВ на кроках $n = \overline{1, N-1}$ ототожнюється з рішенням u_n щодо подовження спостережень, оскільки при подальшому спостереженні вторгнення може виникнути та бути виявленим. На N-му кроці спостереження припиняється з вірогідністю 1 і разом із втратами (4) виникають втрати зв'язані з прийняттям рішення $u_N = 0$:

$$g(\theta, \lambda, u_N, N) = \begin{cases} g_{00}(N), \theta = 0, u_N = 0, \\ g_{10}(N) + c \cdot (N - [\lambda]), \theta = 0, \lambda < N\Delta, u_N = 0, \\ \tilde{g}_{10}(N), \theta = 1, \lambda < N\Delta, u_n = 0. \end{cases} \tag{5}$$

В (4) та (5) значення $g_{i1}(n)$, $g_{i0}(N)$, $\tilde{g}_{1j}(n)$ не залежать від λ, причому $g_{11}(n) \le g_{01}(n)$, $g_{00}(N) \le \tilde{g}_{10}(N) < g_{10}(N)$. Їх залежність від номера кроку може бути обумовлена вартістю спостережень.

Далі необхідно дослідження властивостей послідовності $\{\Pi_n, n \ge 1\}$, де $\Pi_n = P(\theta = 1 \mid x_1^n)$ апостеріорна вірогідність події $\{\theta = 1\}$, та зв'язаною з Π_n рівністю

$$\Pi_n = \vartheta\Lambda_n / (1 + \vartheta\Lambda_n), n \ge 0 (\vartheta = \Pi_{01} / \Pi_{00}) \tag{6}$$

Статистики $\Lambda_n = \overline{p}_1(x_1^n \int p_0(x_1^n))$ усередненого щодо розподілу λ_0 об'єкта прогнозу (УОП).

Тут $\overline{p}_1(x_1^n) = \int\limits_0^\infty p_1(x_1^n \mid \lambda) d\Pi(\lambda)$.

Оскільки (1)-(3), отримуємо

$$\Lambda_n = A_n + \sum_{j=0}^{n-1} \beta_{j+1}(x_{j+1}) \prod_{i=j+2}^{n} \gamma_i(x_i), \tag{7}$$

де $\prod\limits_k^n \gamma_j = 1,\ k > n_i,\ A_n = P(\lambda_0 \ge n\Delta \mid \theta = 1)$;

$$\beta_n(x_n) = \int\limits_{(n-1)\Delta}^{n\Delta} \frac{p_{\lambda n}(x_n)}{p_{0n}(x_n)} d\Pi(\lambda); \tag{8}$$

$$\gamma_n(x_n) = p_{1n}(x_n) / p_{0n}(x_n). \tag{9}$$

З (7) отримуємо рекурентну формулу

$$\Lambda_{n+1} = A_{n+1} + \beta_{n+1}(x_{n+1}) + \gamma_{n+1}(x_{n+1})(\Lambda_n - A_n),\ n \ge 0,\ \Lambda_0 = 1, \tag{10}$$

з якої витікає, що

$$\Lambda_n \ge A_n \ge A_{n+1}, n \ge 1. \tag{11}$$

Тепер визначимо безумовну щільність

$\tilde{p}(x_1^{n+1}) = \Pi_{01}\, \tilde{p}_1(x_1^{n+1}) \Pi_{00} p_0(x_1^{n+1})$, $n \ge 0$, n відповідну умовну щільність

$$p_{n+1}(x_{n+1} \mid x_1^n) = \tilde{p}\ (x_1^{n+1}) / \tilde{p}\ (x_1^n) = \\ = \frac{\vartheta\Lambda_{n+1} + 1}{\vartheta\Lambda_n + 1} p_{0n+1}(x_{n+1}) = \frac{1 - \Pi_n}{1 - \Pi_{n+1}} p_{0n+1}(x_{n+1}). \tag{12}$$

З (6), (10) та (12) слідує що

$$p_{n+1}(x_{n+1} \mid x_1^n) = p_{n+1}(x_{n+1} \mid \Lambda_n) = p_{n+1}(x_{n+1} \mid \Pi_n). \tag{13}$$

З (10) та (13) витікає, що системи $(\Pi_n, F_n^x \overline{P})$, $(\Lambda_n, F_n^x \overline{P})$, $n \ge 0$, де $F_n^x = \sigma(x_1^n) - \sigma$- алгебра, яка породжена x_1^n, є марковськими неоднорідними випадковими функціями (див. лему 17 в [6]).

Також розглянемо статистичну $\tilde{\Pi}_n = P(0 \le \lambda_0 < n\Delta \mid x_1^n)$, що являє собою апостеріорну вірогідність наявності вторгнень до моменту $n\Delta$. Очевидно що

$$\tilde{\Pi}_n = \Pi_n P(\lambda_0 < n\Delta \mid 0 = 1, x_1^n). \tag{14}$$

Далі, оскільки подія $\{0 \le \lambda_0 < n\Delta\}$ еквівалентна події $\left\{\bigcup\limits_1^n \mid \lambda_0 \in [(i-1)\Delta, i\Delta]\right\}$, причому

$\{\lambda_0 \in [(i-1)\Delta, i\Delta]\} \bigcap \{\lambda_0 \in [(i-1)\Delta, j\Delta]\} = \emptyset$, то

$$P(\lambda_0 < n\Delta \mid \theta = 1, x_1^n) = \sum_{i=1}^{n} P\left\{(i-1)\Delta \le \lambda_0 < i\Delta \mid \theta = 1\right\}. \tag{15}$$

Використовуючи формулу для умовної ймовірності та(1)-(3) отримуємо:

$$P\left\{(i-1)\Delta \le \lambda_0 < i\Delta \mid x_i^n, \theta = 1\right\} = \begin{cases} \beta_i(x_i)\prod\limits_{i+1}^{n} \gamma_S\,(x_S) \big/ \Lambda_n, i = \overline{1,n}, \\ \alpha_i / \Lambda_n, i \ge n+1, \end{cases}, \tag{16}$$

де $\alpha_i = P\left\{(i+1)\Delta \le \lambda_0 < i\Delta \mid \theta = 1\right\}$.

З (15), (16) та (7) виходить, що

$$P\left\{\lambda_0 < n\Delta \mid \theta = 1, x_1^n\right\} = (\Lambda_n - A_n) \big/ \Lambda_n, \; n > 0 \tag{17}$$

Комбінуємо (15), (16), та (6):

$$\tilde{\Pi}_n = \vartheta(\Lambda_n - A_n) / (1 - \vartheta\Lambda_n), n \ge 0; \tag{18}$$

$$\tilde{\Pi}_n = \Pi_n - \vartheta A_n / (1 - \Pi_n), n \ge 0, \tag{19}$$

Використовуючи (18), (10) отримуємо рекурентне співвідношення для статистики $\tilde{\Pi}_n$:

$$\tilde{\Pi}_{n+1} = \frac{\tilde{\Pi}_n \gamma_{n+1}(x_{n+1}) + \vartheta\beta_{n+1}(x_{n+1})(1 - \tilde{\Pi}_n) / (1 + \vartheta A_n)}{\tilde{\Pi}_n \gamma_{n+1}(x_{n+1}) + \left\{1 + \vartheta\left[A_{n+1} + \beta_{n+1}(x_{n+1})\right]\right\}(1 - \tilde{\Pi}_n) / (1 + \vartheta A_n)}, n \ge 0, \tilde{\Pi}_n = 0, \tag{20}$$

звідси випливає, що система $(\tilde{\Pi}_n, F_n^x, \overline{P}), n \ge 0,$ також є марківською випадковою функцією, (рівність (13) справедлива для $\tilde{\Pi}_n$).

У разі стрибкоподібного ІВ, коли $p_{\lambda n}(x_n) = p_{1n}(x_n)$ для всіх $(n-1)\Delta \le \lambda < n\Delta$, або дискретного розподілення λ_0

$$(\Pi(\lambda) = \sum_{i=0}^{k(\lambda)} \alpha_i I(\lambda - i\Delta), k(\lambda) = \min\left\{i : \lambda \ge i\Delta\right\},$$

$$I(\lambda) = 1 \text{ при } \lambda \ge 0, \text{ I}(\lambda)\text{=0 при } \lambda < 0), \tag{21}$$

$$\beta_n(x_n) = \gamma_n(x_n)\alpha_n, \; n \ge 1.$$

Підставляючи (21) в (10) та (20) отримуємо

$$\Lambda_{n+1} = A_{n+1} + \gamma_{n+1}(x_{n+1})(\Lambda_n - A_{n+1}), \; n \ge 0, \; \Lambda_0 = 1, \tag{22}$$

$$\tilde{\Pi}_{n+1} = \frac{\gamma_{n+1}(x_{n+1})\left[\tilde{\Pi}_{n+1} + (1 - \tilde{\Pi}_n)B_{n+1}\right]}{\left[\tilde{\Pi}_n + (1 - \tilde{\Pi}_n)B_{n+1}\right]\gamma_{n+1}(x_{n+1}) + (1 - B_{n+1})(1 - \tilde{\Pi}_k)}, n \ge 0, \tilde{\Pi}_0 = 0, \tag{23}$$

де $B_{n+1} = \vartheta\alpha_{\partial n+1} / (1 + \vartheta A_n)$.

В окремому випадку коли спостереження розподілені $p_{0n}(x_n) = p_0(x_n)$, $p_{1n}(x_n) = p_1(x_n), x \ge 1$ апріорна ймовірність наявності ІВ $\Pi_{01} = 1$ і апріорне розподілення ймовірностей λ_0 є геометричним:

$$P(\lambda_0 = \lambda) = \begin{cases} \alpha_0, \lambda = 0, \\ (1 - \alpha_0)\alpha(1 - \alpha)^{i-1}, \lambda = i\Delta, i \ge 1, \end{cases} \tag{24}$$

$$P\left\{\lambda_0 \in (i\Delta, (i+1)\Delta)\right\} = 0, \; i \ge 0.$$

Система $(\tilde{\Pi}_n, F_n^x, \overline{P}), n \ge 0$ виявляється однорідною, так як $\gamma_{n+1}(x_{n+1}) = \gamma(x_{n+1}), B_{n+1} = \alpha_{n+1} / A_n = \alpha = const$.

Однак якщо $\Pi_{01} < 1$, то як неважко побачити, система $(\tilde{\Pi}_n, F_n^x, \overline{P}), n \geq 0$, виявляється неоднорідною. Для того щоб вона була однорідною, необхідно виконання умови $B_n = B = const$, $n \geq 0$ тобто щоб $\vartheta A_n(1-B) - \vartheta A_{n+1} - B = 0$, $n \geq 0$, звідки слідує, що

$$A_n = (A_0 + 1/\vartheta)(1-B)^n - 1/\vartheta, \; n \geq 0. \tag{25}$$

Розподілення, що відповідає (25), не є імовірнісним, оскільки

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \begin{cases} -\vartheta^{-1}, \; B \in (0,1], \\ \infty, \; B \leq 0, \\ -\infty, \; B > 1. \end{cases}$$

Таким чином, не існує ймовірного апріорного розподілення λ_0, при якому система $(\tilde{\Pi}_n, F_n^x, \overline{P}), n \geq 0$, являє собою однорідну марківську однорідну випадкову функцію, якщо ІВ з'являється з ймовірністю, менша за 1.

Системи $(\Lambda_n, F_n^x, \overline{P}), (\Pi_n, F_n^x, \overline{P}), n \geq 0$, також є неоднорідними марківськими функціями при будь яких апріорних розподіленнях λ_0. Для $(\Lambda_n, F_n^x, \overline{P})$ це безпосередньо випливає з (10), (22). При Π_n втрачає смисл $(\Pi_n \equiv 1, n \geq 0)$, а $\tilde{\Pi}_n$ зв'язна з УОП $\Lambda_n = \int_0^\infty \left[p(x_1^n \mid \lambda_0 = \lambda) \big/ (x_1^n \mid \lambda_0 \geq n\Delta) \right] d\Pi(\lambda)$ рівністю (17).

Надалі зручно користуватися статистикою L_n яка зв'язана з УОП Λ_n рівністю

$$L_n = \Lambda_n - A_n. \tag{26}$$

З (10), (22) витікає, що для L_n мають місце рекурентні співвідношення

$$L_{n+1} = \beta_{n+1}(x_{n+1}) + \gamma_{n+1}(x_{n+1}) L_n, \; n \geq 0, \; L_0 = 0; \tag{27}$$

$$L_{n+1} = \gamma_{n+1}(x_{n+1})(\alpha_{n+1} + L_n), \; n \geq 0, \; L_0 = 0; \tag{28}$$

у випадку поступового та стрибкоподібного ІВ відповідно.

З (28) слідує, що $(L_n, F_n^x, \overline{P}), \; n \geq 0$, являється однорідною марківською функцією у випадку однорідних спостережень, стрибкоподібних ІВ з рівномірного розподілу λ_0 на інтервалі $(0, T]$ $(\alpha_n = \Delta / T, T > N\Delta)$.

Позначимо $\tilde{\Pi}_n = P(\lambda_0 < i\Delta \mid x_1^n), i \geq 1$, апостеріорну вірогідність наявності вторгнень до миті $i\Delta$; $M(\bullet \mid x_1^n)$ - умовне математичне очікування відносно розподілення з щільністю $p_{n+1}(x_{n+1} \mid x_1^n)$.

Лема. Статистика $\tilde{\Pi}_{in}$ є мартингалом

$$M(\tilde{\Pi}_{in+1} \mid x_1^n) = \tilde{\Pi}_{in}, \; n \geq 0; \tag{29}$$

$$M\tilde{\Pi}_{in} < \infty, \; n \geq 0. \tag{30}$$

Доведення. Справедливість (30) очевидна. Далі, зрозуміло, що

$$\tilde{\Pi}_{in|} = \sum_{j=1}^{i} \Pi_{jn}, \; n \geq 1, \tag{31}$$

де $\Pi_{jn} = P\left\{ (j-1)\Delta \leq \lambda_0 < j\Delta \mid x_1^n \right\}, \; n \geq 1$.

Використовуючи (16), (6) і той факт, що $\Pi_{in} = P\left\{ \lambda_0 \in \left[(i-1)\Delta, i\Delta \right) \mid x_1^n, \theta = 1 \right\}, \Pi_n, i \geq 1$, отримуємо

$$\Pi_{in} = \begin{cases} \vartheta\beta_i(x_i)\prod_{i+1}^{n}\gamma_s(x_s)/(1+\vartheta\Lambda_n), i \le n, \\ \vartheta\alpha_i/(1+\vartheta\Lambda_n), i > n. \end{cases} \quad (32)$$

з урахуванням (32) та (12) знаходимо

$M(\Pi_{in+1} \mid x_1^n) = \Pi_{in}$, $n \ge 0, i \ge 1$, що разом з (31) доводить лему.

Лема дозволяє встановлювати достатність послідовності $\{L_n, n \ge 1\}$, (або $\{\tilde{\Pi}_n, n \ge 1\}$) в послідовності виявлення ІВ при функції втрат (4), (5). Дійсно, як випливає із загальних результатів [7] функція найменшого апостеріорного ризику (НАР) у розглянутій задачі задовольняє співвідношення

$R_n^N(x_1^n) = \min\{R_{n1}(x_1^n), R_{n0}^N(x_1^n)\}, n = \overline{1, N}$, де $R_n^N(x_1^n) - AP$, зв'язаний з рішенням $U_n = 0$ тобто. з продовженням спостережень на n кроці), що задовольняє рекурентному співвідношенню з [9], причому $R_{N0}^N = R_{N1}$, $R_{N1}, R_{N0} - AP$, зв'язані з прийняттям рішень $u_n = 1$, $u_n = 0$.

Використовуючи (4)-(6), (18), (19), після перетворень отримуємо

$$R_{n1}(x_1^n) = \Gamma_{n1}(L_n) + C\sum_{i=0}^{n-1}(n-1)\Pi_{i+1n};$$

$$R_{N0}(x_1^N) = \Gamma_{N1}(L_N) + C\sum_{i=0}^{N-1}(N-1)\Pi_{i+1N}, \text{ де}$$

$$\Gamma_{n1}(L_n) = (1+\vartheta\Lambda_n)^{-1}\left\{\vartheta L_n g_{11}(n) + \vartheta A_n \tilde{g}_{11}(n) + g_{01}(n)\right\}, \quad (33)$$

$$\Gamma_{N0}(L_N) = (1+\vartheta\Lambda_n)^{-1}\left\{\vartheta L_N g_{10}(N) + \vartheta A_N \tilde{g}_{10}(N) + g_{00}(N)\right\}. \quad (34)$$

Далі неважко показати, що

$$\sum_{i=0}^{n-1}(n-1)\Pi_{i+1n} = \sum_{i=0}^{n-1}\tilde{\Pi}_{i+1n}.$$

Тому

$$R_{n1}(x_1^n) = \Gamma_{n1}(L_n) + C\sum_{i=0}^{n-1}\tilde{\Pi}_{i+1n}. \quad (35)$$

$$R_{N0}(x_1^N) = \Gamma_{N0}(L_N) + C\sum_{i=0}^{N-1}\tilde{\Pi}_{i+1N}. \quad (36)$$

З (33)-(36) випливає, що на N-м кроці оптимальне правило має вигляд

$$= \begin{cases} 1, L_N \ge L_N^0, \\ 0, L_N < L_N^0, \end{cases} \quad (37)$$

де $$L_N^0 = \frac{g_{01}(N) - g_{00}(N) + \vartheta A_N\left[\tilde{g}_{11}(N) - \tilde{g}_{10}(N)\right]}{\vartheta\left[g_{10}(N) - g_{11}(N)\right]}. \quad (38)$$

Для знаходження структури оптимального послідовного правила яке користується методом зворотної індукції та рекурентним ставленням із [9]. Враховуючи (13), (26), транзитивність статистики L_N (з урахуванням (27)), рівності (35), (36) та лему на $(N-1)$-му кроці маємо

$$R_{n-10}^N(x_1^{N-1}) = \int_{X_N}\min_{j=0,1}\Gamma_{Nj}\left[L_N(x_N, L_{N-1})\right]pN(x_N \mid L_{N-1})dx_N + C\sum_{i=0}^{N-1}\tilde{\Pi}_{i+1\,N-1}, \quad (39)$$

причому

$$\tilde{\Pi}_{n\,n-1} = \tilde{\Pi}_{n-1} + \tilde{\Pi}_{n\,n-1} = V(L_{n-1} + L_n)/(1+V\Lambda_{n-1}). \quad (40)$$

З (39) та (40) випливає що

$$R_{N-10}^{N}(x_1^{N-1}) = \Gamma_{\leq N-10}^{N}(L_{N-1}) + C\sum_{i=0}^{N-2}\tilde{\Pi}_{i+1\ N-1}\ , \tag{41}$$

де

$$\Gamma_{N-10}^{N}(L_{N-1}) = \int_{X_n} \min_{j=0,1} \Gamma_{Nj}\left[L_N(x_N, L_{N-1}) \mid p_N(x_N \mid L_{N-1}) \times dx_N + c\vartheta(L_{N-1} + \alpha_N) / (1 + \vartheta\Lambda_{N-1})\right.$$

$$\Lambda_{N-1} = L_{N-1} + A_{N-1}.$$

Для $n = N-2, N-3$ з урахуванням співвідношень (29), (40), (41), (35) можна показати, що на довільному n - му кроці має місце рівність

$$R_{N-10}^{N}(x_1^{n}) = \Gamma_{n0}^{N}(L_n) + C\sum_{i=0}^{n-1}\tilde{\Pi}_{i+1n}, n = \overline{1,N}\ , \tag{42}$$

де

$$\Gamma_{n0}^{N}(L_n) = \int_{x_{n+1}} \min\left\{\Gamma_{n+11}\left[L_{n+1}(x_{n+1}, L_n)\right], \Gamma_{n+10}^{N}\left[L_{n+1}(x_{n+1}, L_n)\right]\right\} p_{n+1}(x_{n+1} \mid L_n) dx_{n+1} + $$

$$+ c\vartheta(L_n + \alpha_{n+1}) / (1 + \overline{\vartheta}\Lambda_n), n = \overline{1, N-1} \ . \tag{43}$$

Таким чином, з (20), (35), (42) випливає, що оптимальне правило ІВ має вигляд

$\tau_N^0(L) = \min\left\{1 \leq n \leq N : L_n \notin \vartheta_{nn}^N\right\}$, де $\vartheta_{nn}^N = \left\{L_n : \Gamma_{n0}^N(L_n) < \Gamma_{n1}(L_n)\right\}, n = \overline{1,N}$ є достатньою (відповідно до (37)). Перехід в (33), (43) та статистики $\tilde{\Pi}_n$ за допомогою рівності (18) та подальше дослідження показує, що $\Gamma_{n0}^N(\tilde{\Pi}_n)$ є вигнутою і, отже (через обмеженість), безперервною функцією $\tilde{\Pi}_n$ на інтервалі $[0,1]$. Функція $\Gamma_{n0}^N(\tilde{\Pi}_n)$ є лінійною:

$$\Gamma_{n1}(\tilde{\Pi}_n) = \tilde{\Pi}_n\, g_{11}(n) + (1 - \tilde{\Pi}_n)\left\{\tilde{g}_{11}(n) + \left[g_{01}(n) - \tilde{g}_{11}(n)\right] : (1 + \vartheta A_n)\right\}.$$

Типова залежність $\Gamma_{n1}, \Gamma_{n0}^N$ від $\tilde{\Pi}_n$ наведено на рис.1. З малюнка випливає, що $\vartheta_{nn}^N = \left\{L_n < L_n^0\right\}$, де корінь рівняння

$$\Gamma_{n1}^N(y) = \Gamma_{n0}^N(y), n = \overline{1, N-1}, \tag{44}$$

а значить

$$\tau_N^0(L) = \min\left\{N, \min\left[n \geq 1 : L_n \geq L_n^0\right]\right\}, \tag{45}$$

(L_n^0, довільно при $n \geq N+1$)

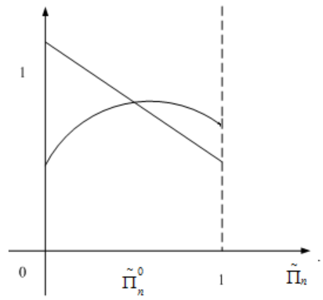

Рис.1. Типові залежності функції Γ_{n1} та Γ_{n0}^N від статистики $\tilde{\Pi}_n$

Послідовне правило виявлення ІВ відповідне (45) має вигляд

$$u_{n0}^{0}(L_n)=\begin{cases}1, L_n \ge L_n^0,\\ 0, L_n < L_n^0, n=\overline{1,N},\end{cases} \tag{46}$$

де при $n \le N-1\, L_n^0$ визначається з (44), а L_N^0 - співвідношенням (38).

З метою подальшої деталізації вважаємо, що для L_N має місце рекурентне співвідношення (28). Строго кажучи, це справедливо при стрибкоподібному вторгненні [4].

Використовуючи (33), (34), (43), (46), (12), після перетворень на $(N-1)$-м кроці отримуємо

$$\Gamma_{N-10}^{N}(L_{N-1})=(1+\vartheta\Lambda_{N-1})^{-1}\left\{\vartheta(L_{N-1}+\alpha_N)\times\left[\sum_{j=0}^{1}g_{1j}(N)P_{1j}^{(1)}(L_{N-1})+c\right]\right.,$$
$$\left.+\left[\sum_{j=0}^{1}\vartheta A_N g_{1j}(N)+g_{0j}(N)\right]P_{0j}^{(1)}(L_{N-1})\right\}$$

де $P_{ij}^{(1)}(L_{\partial N-1})=\int\limits_{X_N^j}P_{iN}(x_N)dx_{Ni}$;

$X_N^0=\left\{x_N : L_N(x_{N_1}L_{N-1})<L_N^0\right\}$;

$X_N^1=\left\{x_N : L_N(x_N L_{N-1})\ge L_N^0\right\}$.

Розглядаючи $(N-2)$, $(N-3)$-й та інші кроки і застосовуючи (43), (46), по індукції можна показати, що на довільному n-му кроці

$$\begin{aligned}&\Gamma_{no}^{N}(L_n)=(1+\vartheta\Lambda_n)^{-1}\{\sum_{\upsilon=1}^{N-n}(\vartheta L_n[g_{11}(n+v)P_{11}^{(\upsilon)}(L_n)+\\&+cP_{10}^{(\upsilon-1)}(L_n)]+[\vartheta\Lambda_n+\upsilon\tilde{g}_{11}(n+v)+g_{01}(n+v)]P_{01}^{(\upsilon)}(L_n))+\\&+\vartheta L_n g_{10}(N)P_{10}^{(N-n)}(L_n)+[\vartheta\Lambda_N\tilde{g}_{10}(N)+g_{00}(N)\times\\&\times P_{01}^{(v)}(L_n)+\vartheta\sum_{S=1}^{N-n}\left[\alpha_{n+S}\sum_{v=S}g_n(n+v)P_1^{(S-1,v)}(L_n)\right]+\\&+\vartheta c\sum_{S=1}^{N-n-1}\alpha_{n+S}\left[P_{00}^{(S-1)}(L_n)+\sum_{v=S}^{N-n-1}P_0^{(S-1,v)}(L_n)\right]+\\&+\vartheta c\alpha_N P_{00}^{(N-n-1)}(L_n)\},n=\overline{1,N-1}\end{aligned}, \tag{47}$$

де (v)

$$P_{ij}(L_n)=\int P_{ij}^{(v-1)}(L_{n+1}(x_{n+1},L_n))_{P_{in+1}}(x_{n+1})dx_{n+1}, v\ge 2; \tag{48}$$

$$P_{ij}(L_n)=\int\limits_{x_{n+1}^j}p_{in+1}(x_{n+1})dx_{n+1}, i,j=0,1; \tag{49}$$

$$P_j^{(S,v)}(L_n)=\int\limits_{x_{n+1}^0}P_j^{(S-1,v-1)}(L_{n+1}(x_{n+1},L_n))P_{0n+1}(x_{n+1})dx_{n+1}, S\ge 1, v\ge 2, S<v; \tag{50}$$

$$P_j^{(0,v)}(L_{n+1})=P_{1j}^{(v)}(L_n), v\ge 1; P_{10}^{(0)}=P_{00}^{(0)}=1; \tag{51}$$

$$X_{n+1}^{(0)}=\left\{x_{n+1} : \gamma_{n+1}(x_{n+1})<(L_{n+1}^0/L_n+\alpha_{n+1})\right\}; \tag{52}$$

$$X_{n+1}^{'}=\left\{x_{n+1} : \gamma_{n+1}(x_{n+1})<(L_{n+1}^0/L_n+\alpha_{n+1})\right\};$$

(залежність $P_j^{(S,v)}$ від n, N тут і далі не виписуємо);

функції $P_j^{(S,v)}(L)(50)$ в області $[0, L_n^0]$ являє собою умовні ймовірності прийняття i-го рішення на $(n+v)$-му кроці за умови спостереження $L_n = L$ та появи ІВ на інтервалі $\left[(n+s)\Delta, (n+s+1)\Delta\right]$;

$$P_j^{(S,v)}(L) = P\left\{u_{n+v} = {}^{j}\!\Big/_{L_n} = L,\ \lambda_0 \in [(n+s)\Delta, (n+s=1)\Delta)\right\} L \in [0, L_n^0).$$

Поріг $L_n^0 = L_n^0(N)$ визначається з рівняння (44) і при заданні видів густин P_{0n}, P_{in} в принципі може бути знайдено з використанням (47)-(52), (33). У разі щільності $P_{1n}, P_{0n}, n = \overline{1, N}$, що сильно розрізняються, можна зробити висновки без котеретизації P_{1n}, P_{0n}. Введемо параметр q_n, що характеризує ступінь помітності P_{0n}, P_{1n}, такий, що з його збільшенні P_{0n}, P_{1n}, дедалі більше різняться і за $q_n \to \infty$ [4]

$P_{ij}^{(v)}(L) \to 0, v \ge 1, i \ne j$;

$P_{ij}^{(s,v)}(L) \to 0, v \ge 2, s < v-1, i, j = 0,1$;

$P_0^{(v-1;v)}(L) \to 0$;

$P_{ij}^{(v)}(L) \to 0, v \ge 2$;

$P_1^{(v-1;v)}(L) \to 1, v \ge 2$;

$P_{ii}^{(1)}(L) \to 1, (L < L_n^0)$. (53)

Вважаючи відповідні функції (53) рівними своїм граничним значенням і використовуючи (47), (33), (44), неважко показати, що

$$\tilde{L}_n^0(\infty) = \frac{g_{01}(n)^{\vartheta^{-1}} + An\,\tilde{g}_{11}(n) - \sum_{S=2}^{N-n} \alpha_{n+S} g_{11}(n+S) - \alpha_{n+1} g_{11}(n)}{g_{11}(n+1) - g_{11}(n) + c}, \tag{54}$$

$$\tilde{L}_{n-1}^0(\infty) = \frac{[g_{01}(N-1) - g_{00}(N)]\vartheta^{-1} + A_{N-1}\,\tilde{g}_{11}(N-1) - A_N\,\tilde{g}_{10}(N) - \alpha_N g_{11}(N-1)}{g_{11}(N) - g_{11}(N-1) + c}, \tag{55}$$

де $\tilde{L}_n^0(\infty) = \lim\limits_{q_n \to \infty} \tilde{L}_n^0(q_n)$; $\tilde{L}_n^0(q_n) = \tilde{L}_n^0(q_n) + \alpha_{n+1}$.

У граничному випадку $q_n \to \infty$ оптимальні пороги менші, ніж значення, одержувані за допомогою (54) і (55).

Тепер розглянемо випадок $\Pi_{01} = 1$ та неусічену послідовну процедуру. Втрат $g_n(n)$ в (4) відсутні. Припустимо

$$\tilde{g}_{11} = \varphi + c_1 n;\ \tilde{g}_{11}(n) = c_1 n, \tag{56}$$

де c_1 - вартість одного кроку спостереження; φ_0 - Втрати пов'язані з помилковою тривогою. У цьому випадку виявляється зручніше користуватися достатньою статистикою $\tilde{\Pi}_1$, що дорівнює апостеріорній ймовірності ІВ до моменту $n\Delta$ (див. (23)).

Враховуючи (18), (54), (56) при $\Pi_{01} = 1$, $N \to \infty$, отримуємо, що оптимальне граничне значення порога в несіченій процедурі у просторі $\tilde{\Pi}_n$

$$\tilde{\Pi}_n^0(\infty)=\frac{\varphi_0-c_1\sum_{s=1}^{\infty}sB_{n+s}-cB_{n+1}}{\varphi_0+c_1(1-\sum_{s=1}^{\infty}sB_{n+s})+(1-B_{n+1})},\qquad(57)$$

де $B_{n+s}={}^{\alpha_{n+s}}\!/_{A_n}$

зокрема, при геометричному розподілі λ_0 (24)

$$B_{n+s}=\alpha(1-\alpha)^{S-1};\ \sum_{s=1}^{\infty}sB_{n+s}=\alpha^{-1}\qquad(58)$$

і з (57), (58) випливає, що $\tilde{\Pi}_n^0$ не залежить від n:

$$\tilde{\Pi}_n^0(\infty)=\tilde{\Pi}^0(\infty)=\frac{\varphi_0-{}^{c_1}\!/_{\alpha-c\alpha}}{\varphi_0-c_1\,{}^{(1-\alpha)}\!/_{\alpha+c(1-\alpha)}},n\geq 1.\qquad(59)$$

У разі однаково розподілених спостережень при втратах виду (56) та $N\to\infty$ від номера n не залежить не тільки граничне значення порога $\tilde{\Pi}^0(\infty)$, а й додаткове $\tilde{\Pi}^0(q)$, що є наслідком однорідності послідовності $(\tilde{\Pi}_n,F_n^x,P),n\geq 0$.

Однак при $\Pi_{01}<1$ оптимальний поріг залежить від номера кроку при будь-якому апріорному розподілі λ_0, оскільки послідовність $(\tilde{\Pi}_n,F_n^x,P),n\geq 0$ неоднорідна.

Якщо залежність вартість затримки у прийнятті рішення про наявність ІВ від $n-\lambda$ нелінійна, то статистика L_n (і відповідно $\tilde{\Pi}_n,\Lambda_n$) не є достатньою в задачі послідовного виявлення. При знаходженні достатніх статистик у разі можна використовувати методику [6,9,10]. У задачі непослідовного виявлення оптимальне правило має вигляд (37), (38) при довільній залежності вартості затримки у прийнятті рішення про наявність ІВ від n [4].

Досі розглядалося байєсівське завдання виявлення ІВ. Зокрема, було встановлено, що якщо вторгнення рано чи пізно відбудеться (тобто $\Pi_{01}=1$), спостереження незалежні та однорідні, апріорний розподіл моменту ІВ геометричний (див. (24)) функція тепер має вигляд (4), (56), то в силу того, що апріорна ймовірність ІВ $\left\{\Pi_n,\tilde{F}_n^x,P\right\},n\geq 0$, є однорідним Марківським процесом, оптимальне не усічене послідовне правило виявлення має вигляд

$$u_n^0(\tilde{\Pi}_n)=\begin{cases}1,\tilde{\Pi}_n\geq\Pi^0,\\0,\ \tilde{\Pi}_n\geq\Pi^0,\tilde{n}\geq 1.\end{cases}\qquad(60)$$

Тут $\tilde{\Pi}_n\geq\tilde{\Pi}^0(q)$ постійний поріг, залежний від параметра (), що характеризує ступінь помітності щільностей $p_1(x),p_0(x)$ і величин φ_0,c_1,c, що є відповідно втрат при першій помилковій тривозі, вартістю одиниці спостережень і вартістю затримки у виявленні вторгнення на один крок. При сильно розрізняються щільності (більших за q) близьким до оптимального буде поріг (59).

Задаємо допустиму ймовірність помилкової тривоги $\varphi_0 \in (0,1)$ і позначимо через $\Delta(\alpha)$ клас правил виявлення $u(x)$, котрим ймовірність помилкової тривоги вбирається у α, тобто $P(\tau(u) < \lambda_0)$, де $\tau(u)$ - момент вторгнення, що відповідає правилу $u(x)$; P - міра, що відповідає $(x_n \lambda_0), n \ge 1$. Тоді, зводячи умовно експериментальну задачу до байссовской, можна показати [6], що правило (60) при виборі порога $\tilde{\Pi}_\alpha^0$ таким чином, що $P(\tau_0 < \lambda_0) = \alpha$ мінімізує в класі $\Delta(\alpha)$ середню затримку $M(\tau - \lambda_0)$ у виявленні вторгнення:

$$M(\tau - \lambda_0)^+ = \inf_{u(x)\in\Delta(\alpha)} M(\tau(u) - \lambda_0)^+ .$$

Тут $M -$символ усереднення у міру $P; (y-z)^+ = \max(y-z, 0); \tau_0 = \inf\left\{ n : \tilde{\Pi}_n \ge \tilde{\Pi}_\alpha^0 \right\}$ - момент вторгнення, що відповідає правилу (60). Оскільки $M(\tau - \lambda_0)^+ = P(\tau \ge \lambda_0) M(\tau - \lambda_0 \mid \tau \ge \lambda_0)$, то правила (60) мінімізує також клас $\Delta(\alpha)$ математичного очікування $M(\tau - \lambda_0 \mid \tau \ge \lambda_0)$. Оптимальний поріг $\tilde{\Pi}_\alpha^0 = \tilde{\Pi}_\alpha^0(q)$ залежить від ступеня помітності щільностей $p_1(x), p_0(x)$, та його точне визначення є складним завданням. Однак, зауважуючи, що $\alpha = P(\tau_0 < \lambda) = M(1 - \tilde{\Pi}_{\tau_0}), M\tilde{\Pi}_{\tau_0}(q)$ отримуємо $\tilde{\Pi}_\alpha^0(q) \le 1 - \alpha$.

Якщо в якості порога використовувати верхню межу $1-\alpha$ ймовірність помилкової тривоги у такій процедурі $\alpha(u) \le \alpha$, оскільки $\alpha(u) = M(1 - \tilde{\Pi}_{\tau(u)})$, $M\tilde{\Pi}_{\tau(u)} \ge 1 - \alpha$, $\tau(u) = \inf\left\{ n : \tilde{\Pi}_n \ge 1 - \alpha \right\}$. Значення $\alpha(u)$ буде близько до α тільки при малих перескоках порога величиною $\tilde{\Pi}_{\tau(u)}$, що може бути виконано при "близьких" щільностях (малих q) і малих α.

Правило (60) оптимально як і байєсівське, і у умовно екстремальному завданні лише за геометричному апріорному розподілі λ_0 (як і (24)). Якщо це розподіл інше то статистика $\tilde{\Pi}_n, n \ge 0$, виявляється неоднорідної функцією і оптимальний поріг залежить від часу. При цьому невідомо, чи є правило (60) близьким до оптимального хоча б асимптоматично при великому з середнього часу виявленні ВВ у малих α. У той же час лема, що для критичних додатків правило (60) з постійним порогом може становити інтерес тільки в тому випадку, якщо воно близьке до оптимального при слабких реченнях характеру апріорного розподілення. Проте вдається побудувати модифікацію правила (60), яка виявляється оптимальною без введення апріорного розподілу моменту λ_0 [11].

Нехай $\lambda \in \{1, 2, 3, ..., \infty\}$ – невідомий момент збою, про властивості якого робиться жодних припущень. Через M_∂ позначимо математичне очікування, що відповідає розподілу спостережень при фіксованому λ, через M_∞ – те ж очікування при $\lambda = \infty$, через $\Delta(T)$ – клас правил $M_\infty \tau(u) \ge T$, де $T-$ задана компонента $(T < \infty)$, що характеризує обмеження на середній час до хибної тривоги. Бажано, щоб середній час до хибної тривоги було якомога більше, а середній час затримки у виявленні збою, що вимірюється величиною

$\tilde{\tau}_\lambda(u) = M_\lambda(\tau(u) - \lambda \mid \tau(u) \ge \lambda$, – якнайменше для всіх $1 \le \lambda < \infty$. Однак такого поступово кращого правила не існує. Тому мінімальне правило, що мінімізує величину $\sup \tilde{\tau}(u) 1 \le \lambda < \infty$ до класу $\Delta(T)$. Побудова такого правила заснованого на тій ідеї, що якщо правило є узагальненим байєсівським та еквівалентним, то воно мінімальне [12] (тобто правило є байєсівським щодо деякого невласного розподілу і виходить шляхом граничного переходу від послідовності байєсівських правил і $\tilde{\tau}_\lambda$ йому залежить від λ.

Використовуючи (15), (16), (21), неважко показати, що правило (60) еквівалентно порівнянню порогом статистики $.\varphi_{n,d} = \sum_{k=1}^{n} \prod_{i=k}^{n} \left[\gamma(x_i) \big/ (1-\alpha) \right]$, яка є нормованою на величину $\lambda(1-\alpha)^{n-k}$ статистикою L_n. У межі при $\alpha \to 0$ статистика

$$\varphi_{n,\alpha} \to \varphi_n = \sum_{k=1}^{n} \prod_{i=k} \gamma(x_i).$$

Розглянемо правило

$$u_n^A(\varphi_n) = \begin{cases} 1, \varphi_n \ge A, \\ 0, \varphi_n < A, n \ge 1, \end{cases} \tag{61}$$

де А деякий поріг, а статистика λ_n задовольняє рекурентному співвідношенню

$$\varphi_{n+1} = \gamma(x_{n+1})(1 + \varphi_n), \; \varphi = 0, \tag{62}$$

і є аналогом об'єкта прогнозу , усередненого на інтервалі $\overline{1,n}$ по невласному рівномірному розподілу, що приписує всім точкам числової прямої ваги, рівні 1 $(\gamma(x) = p_1(x) \big/ p_0(x))$. Позначимо через $\tau_A = \inf\{n \ge 1 : \varphi_n \ge A(T)\}$ можливе виявлення вторгнення, що відповідає правилу (61), в якому поріг $A = A(T)$ вибирається таким чином, що $M_{00}\tau_A = T$. З (62) слід, що $M_{00}(\varphi_{n+1} \mid x_1^n) = 1 + \varphi_n$, отже $\varphi_n - n$ є маргіналом з нульовим середнім і $M_\infty(\varphi_{\tau A} - \tau_A) = 0$. Якщо не зважати на перескок порога статистикою $\varphi_{\tau A}$, то $A(T) \approx T$, хоча ця оцінка може бути грубою. Принаймні вважаючи $A(T) \approx T$, маємо $M_\infty \tau_t \ge T$, тобто $u^T(\varphi) \in \Delta(T)$. Правило (61), проте, є мінімаксним, оскільки

$$\tau_\lambda(u^T(\varphi)) = M(\tau_{A(T)} - \lambda \mid \tau_{A(T)} \ge \lambda = \int_0^{A(T)} M_\lambda(\tau_{A(T)} - \lambda \mid \tau_{A(T)} \ge \lambda, \varphi_{\lambda-1} = \varphi) \times P(d\varphi \mid \tau_{A(T)} \ge \lambda)$$

залежить від λ. Це з тим, що $\bar{\tau}_\lambda(\varphi_{\lambda-1}) = M_\lambda(\tau_{A(T)} - \lambda \mid \tau_{A(T)} \ge \lambda, \varphi_{\lambda-1})$ залежить від λ. Дійсно, при $\lambda = 1$ знаходимося зовсім в інших умовах, ніж при $\lambda \ge 2$, оскільки $\varphi_0 \equiv 0$, а $n \ge 1$, є випадковими величинами з розподілами залежать від n (процес $\{\varphi_n\}$ однорідний, але нестаціонарний). Можна, однак, "підтримувати" статистику φ_n рандомізацією в початковий момент, щоб виключити цей ефект. Більш точно, генеруватимемо величину z відповідно до розподілу $\psi(y) = P(z \le y) = P_\infty(\tilde{\varphi}_n \le y \mid \tau_A^0 \ge n+1)$, де P_∞ - міра, що відповідає спостереженням при $\lambda = \infty$ (тобто за відсутності збоїв); $\left\{\tilde{\varphi}_n\right\}$- послідовність, що задовольняє рекурентному співвідношенню

$$\tilde{\varphi}_{n+1} = \gamma(x_{n+1})(1+\tilde{\varphi}_n), \tilde{\varphi}_0 = z; \tag{63}$$

$\tau_A^0 = \inf(n \geq 1 : \varphi_n \geq A)$ момент ІВ, що відповідає правилу виявлення $u(\tilde{\varphi})$ виду

$$u(\tilde{\varphi}) = \begin{cases} 1, \tilde{\varphi}_n \geq A, \\ 0, \tilde{\varphi}_n < A, n \geq 1 \end{cases}. \tag{64}$$

Таким чином, послідовність $\left\{\tilde{\varphi}_n\right\}$ відрізняється від $\left\{\varphi_n\right\}$ тільки тим, що виходить не з нуля, а з випадкової точки $\tilde{\varphi}_n = z \in [0, A)$. Розподіл величини z підбирається так, щоб послідовність $\tilde{\varphi}_n, n = 1,2,3,...$, на множинах $\{\tau_A^0 \geq n+1\}$ була однорідною. У цьому значення $\tilde{\tau}_\lambda^0(y) = M_\lambda(\tau_A^0 - \lambda \mid \tau_A^0 \geq \lambda, \tilde{\varphi}_{\lambda-1} = y)$ не залежить від λ, оскільки будь-якого $\lambda \geq 1$ при филесированому $\varphi_{\lambda-1}$ положення однаково. Отже, середній час запізнення у виявленні збою $\tilde{\tau}_\lambda^0 = \int_0^A \tau_\lambda^0(y) d\psi(y)$ також не залежить від λ і правило (64) еквівалентно. Тому є природним претендентом на мінімаксне правило. Однак вдається довести лише асимптотичну мінімаксність при великих значеннях $T(II)$.

Теорема. Нехай розподіл величини $\gamma(x)$ безперервно і

$\int \max\{0, \gamma(x)\} p_1(x) dx < \infty$.

Тоді для кожного $T < \infty$ існують значення $A = A(T) < \infty$ і ймовірний захід ψ_A, такі, що $M_\infty \tau_A^0 = T$ і для будь-якого правила $u(x) \in \Delta(T)$ при $T \to \infty$

$$\sup_{1 \leq \lambda < \infty} M_\lambda(\tau(u) - \lambda \mid \tau(u) \geq \lambda) \geq \sup_{1 \leq \lambda < \infty} M_\lambda(\tau_A^0 - \lambda \mid \tau_A^0 \geq \lambda) + o(1)$$

З цієї теореми випливає майже мінімаксність правила (64), оскільки $\tilde{\tau}_\lambda^0 \equiv \tilde{\tau}_1^0(T) \to \infty$, решта члена $o(I) \to 0$ при $T \to \infty$.

Певні заходи ψ_A є складним завданням. Зрозуміло, проте, що з $T \to \infty$ міра $\psi_A(y)$ збігається з граничним (стаціонарним) розподілом статистики φ_n при $n \to \infty$. Для бернулліївської послідовності та послідовності спостережень з показовим розподілом міри ψ_A визначено у [11]. Оскільки $\tilde{\varphi}_n - n$ є мартингалом з математичним очікуванням $M_\infty \tilde{\varphi}_0$ (відповідно до (63)), то $M_\infty(\tilde{\varphi}_{\tau_A^0} - \tau_A^0) = M_\infty \tilde{\varphi}_0$ і поріг $A(T)$ визначається з рівняння $M_\infty \tilde{\varphi}_{\tau_A^0} = M_\infty \tilde{\varphi}_0 + T$.

Якщо як поріг взяти $\overline{A}(T) = T + M_\infty \tilde{\varphi}_0$, то $M_\infty \tau_A^0 \geq T$. Проте, по-перше, у своїй зростає $\tilde{\tau}_A^0$ і, по-друге, знайти $M_\infty \tilde{\varphi}_0 = \int_0^A y d\psi_A(y)$ можна лише після визначення міри ψ_A. Ці обставини породжують проблеми практичного використання побудованого мінімаксного правила (64). У той же час ясно, що принаймні при великих значеннях λ затримка $\overline{\tau}_{\lambda}$ у виявленні збою правилом (62) не повинна суттєво відрізнятись від $\overline{\tau}_1^{0}$ у випадку $T \to \infty$, оскільки зі збільшенням часу спостереження процес $\{\varphi_n\}$ можна вважати стаціонарним.

У разі експоненційного однопараметричного сімейства, коли вхідна (62) величина

$$\gamma(x) = \exp\{\theta x - b(\theta)\} = \gamma_\theta(x),$$

де $b(\theta)$ – опукла вниз функція, що має дві похідні $(b(\theta) = b'(0) = 0)$, асимптотичні властивості правила (61) при $T \to \infty$ досліджені в [11].

Введемо такі позначення: $M_{t,\lambda}$ – математичне очікування збою λ та параметру $\theta = t$; $I_0 = M_{\theta,1}\left[\ln \gamma_\theta(x_1)\right] = \theta b'(\theta) - b(\theta)$ – інформаційна кількість Кульбану;

$$N_b(\theta) = \inf\left\{n : \sum_{i=1}^{n} \ln \gamma_\theta(x_i) \geq B\right\}, \qquad \beta_\theta = \lim_{B\to\infty} M_{\theta,1} exp\left\{-\left[\sum_{n=1}^{N_B(\theta)} \ln \gamma_\theta(x_n) - B\right]\right\}$$

– величина, що певним чином характеризує середній перескок порога; $E_{t,\theta} = \sup_{1\leq\lambda<\infty} M_{t,\lambda}(\tau_A(\theta) - \lambda + 1 \mid \tau_A(\theta) \geq \lambda)$ – максимальне за моментом значення середньої затримки в її виявленні з правилами (61) вбудованого значення θ, коли в дійсності параметр після збору рівня t. По очевидним причинам $E_{t,\theta} = M_{t,1}\tau_A$, і, відповідно, для оцінки $E_{t,\theta}$ потрібно оцінити останнє очікування. З [11] випливає, що якщо поріг A в (61) вибрати за формулою $A = \beta_\theta T$ і $I_\theta < \infty$, $0 < tb'(\theta) - b(t) < \infty$ для $\theta \in \Theta$, то при $T \to \infty$ і $\theta \in \Theta(\Theta \subset R^1)$

$$M_\infty \tau_A(\theta) = T(1 + o(1)); \tag{65}$$

$$E_{t,\theta} = \frac{1}{tb'(\theta) - b(t)}\left[\ln T + C_{t,\theta} + o(1)\right], \tag{66}$$

де $C_{t,\theta}$ – деяка константа.

Значення $E_{t,\theta}$ зростає зі збільшенням різниці між t і θ. Тому, коли значення параметра θ щільності після збою заздалегідь невідоме, характеристики правила (61) можуть виявитися незадоволеними. Істотно найкращі характеристики при цьому має правило

$$\tau = \inf\left\{n \geq 1 : \overline{\varphi}_n \geq T\beta_F\right\},$$

де $\overline{\varphi}_n = \int_\theta \varphi_n(\theta) dF(\theta)$ - усереднена за деякою мірою $F(\theta)$ статистика (62) $\beta_F = \int_\theta \beta_{\theta^{-1}} dF(\theta)$. Для цього правила за умови, що $F\{\theta : I_\theta < \infty\} = 1$ і $F'(\theta)$ позитивна і безперервна, справедливі наступні асимптотичні рівності [11]

$$M_\infty \tau = T(1 + o(1));$$

$$\overline{E}_t = I_t^{-1}\left[\ln T + \frac{1}{2}\ln b_2 T + C_{t,F} + o(1)\right], \qquad T \to \infty,$$

де $E_t = \sup_{\lambda\geq 1} M_{t,\lambda}(\tau - \lambda + 1 \mid \tau \geq \lambda) = M_{t,1}\tau$.

Таким чином, головний член асимптотичного розкладання ризику збігається з головним членом розкладання ризику для випадку, коли $\theta = t$ (точно відомо). Тому правило з усереднення асимптоматично оптимально для задачі з невідомим значенням параметра щільності після збою. Наявність подвійного логарифму в розкладанні E_t є платою за апріорну невизначеність.

Аналітичний результат може бути отриманий для модифікації правила, що з правила максимальної правдоподібності.

Правило виявлення (61) дискретного часу було запропоновано та досліджувалося методом Монте-Карло в [13]. Вперше (у разі безперервного часу) це правило розглянуто у [6]. В [14] досліджено послідовне правило виявлення Пейджа, засноване на порівнянні з порогом принципу максимальної правдоподібності. Це правило асимптотично оптимально при $T \to \infty$ (у сенсі першого порядку) у класі $\Delta(T)$ за ризиком $\sup ess \sup_{\lambda \ge 1} M_\lambda \left[(\tau - \lambda + 1) \mid x_1^{\lambda - 1} \right]$, який для нього дорівнює $I^{-1} \ln T(1 + o(1))$, де $I = M_1 \left[\ln \gamma(x_1) \right]$ – інформаційна кількість Кульбака. У [15] встановлена строга мінімаксність цього правила у класі $\Delta(T)$ для всіх T.

Узагальнюємо отримані результати на випадок, коли виникнення збою даних x_n, $n > \lambda$, що спостерігаються, розподілені відповідно до одного з декількох розподілів $p_i(x_n)$, $i = \overline{1, M}$, $M \ge 2$ і необхідно визначити з яким. Бажано знайти таке правило, яке мінімізує у класі $\Delta(T)$ максимальні значення $\sup_{\lambda \ge 1} \bar{\tau}_{i\lambda} = \sup_{\lambda \ge 1} M_{i\lambda}(\tau - \lambda \mid \tau > \lambda)$ для всіх $i = \overline{1, M}$.

Однак знайти таке правило і навіть довести його існування за $M > 1$ і кінцевого T не вдається.

Тому зосередимо увагу на випадок $T \to \infty$. Розглянемо правило

$$u_n^*(\varphi_n) = \begin{cases} j, \varphi_{nj} \ge A_i(T), \\ O, \varphi_{nj} < A_i(T) = \overline{1, M}, n \ge 1, \end{cases} \tag{67}$$

де $\varphi_n = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{nM})$; $\varphi_{ni} = \sum_{k=1}^{n} \prod_{S=k}^{n} \gamma_i(x_s)$; $\gamma_i(x) = {p_i(x)} \big/ {p_0(x)}$. Компоненти статистики φ_n задовольняють рекурентним співвідношенням з (62).

$$\varphi_{n+1i} = \gamma_i(x_{n+1})(1 + \varphi_n), \ \varphi_{0i} = 0, \ i = \overline{1, M}. \tag{68}$$

Момент ІВ $\tau^* = \tau(u^*)$, відповідає правилу (67)

$$\tau^* = \min_{i \in \overline{1, M}} \tau_i, \ \tau_i = \inf \left\{ n : \varphi_{ni} \ge A_i(T) \right\}. \tag{69}$$

Зрозуміло що $(M_\infty \tau^*)^{-1} \le \sum_{i=1}^{M} (M_\infty \tau_i)^{-1}$. Тому, якщо пороги $A_i(T)$ обрани таким чином, що $M_\infty \tau_i \ge MT$, то $(c_i \ge 1)$

$$M_\infty \tau^* \ge \frac{1}{\sum_{i=1}^{M} (M_\infty \tau_i)^{-1}} = \frac{TM}{\sum_{i=1}^{M} c_i^{-1}} \ge \frac{T}{\min_i c_i^{-1}} \ge T, \tag{70}$$

причому бажано, щоб $M_\infty \tau_i \ge MT$.

З (68) слід, що статистики φ_{ni}^{-n}, $i = \overline{1, M}$, є P_∞ – мартингалами з нульовими середніми, тому $M_\infty \tau_i = M_\infty \varphi_{\tau_i i}$. Так як $M_\infty \varphi_{\tau_i i} \ge A_i(T)$, то вибір $A_i(T) = MT$ забезпечує нерівності $M_\infty \varphi_{\tau_i i} \ge MT$ і відповідно до (70) належність правила (67) класу $\Delta(T)$. Далі зважаючи на (69) $M_{i\lambda}(\tau^* - \lambda \mid \tau^* > \lambda) = \bar{\tau}_{i\lambda}^* \le M_{i\lambda}(\tau_i - \lambda \mid \tau_i > \lambda)$.

Оскільки аналогічно (66) при $A_i(T) = MT$ і $T \to \infty$ $M_{i\lambda}(\tau_i - \lambda \mid \tau_i > \lambda) = I_i^{-1}\ln(MT)(1+o(1)) = I_i^{-1}\ln T(1+o(1))$, де $I_i = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_i(x)\ln\gamma_i(x)dx$,

то $\bar{\tau}_{i\lambda}^{*} \le I_i^{-1}\ln T(1+o(1))$, $T \to \infty$. (71)

Однак очевидно, що середня затримка у виявленні збою для багатоальтернативного правила не може бути меншою за середню затримку у разі, коли є лише одна (і-а) гіпотеза. Оскільки мінімальна затримка за наявності однієї і-ї гіпотези не менше величини $I_i^{-1}\ln T(1+o(1))$, іноді $T \to \infty$, то для всіх багатоальтернативних правил класу $\Delta(T)$ справедлива наступна оцінка.

$$\sup_{\lambda\ge 1} M_{i\lambda}(\tau - \lambda \mid \tau > \lambda) \ge I_i^{-1}\ln T(1+o(1)). \quad (72)$$

З (71) та (72) випливає, що

$$\bar{\tau}_{i\lambda}^{*} = I_i^{-1}\ln T(1+o(1)),\ T \to \infty,\ i = \overline{1,M}. \quad (73)$$

Таким чином, багатоальтернативне правило (67) при $A_i(T) = MT$ асимптотично еквівалентно і для середньої затримки у виявленні збою при і-й гіпотезі справедливо рівності (73), що збігається з аналогічною рівністю за наявності лише однієї гіпотези. Тому воно є асимптотично мінімаксним правилом за першим порядком:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\sup\limits_{\lambda\ge 1} \bar{\tau}_{i\lambda}^{*}(T)}{\inf\limits_{u\in\Delta(T)} \sup\limits_{\lambda\ge 1} M_{i\lambda}(\tau - \lambda \mid \tau > \lambda)} = 1.$$

Висновки. Таким чином, процес оцінювання властивості інформаційних вторгнень чи психологічних впливів, що дозволяють з'ясувати рівень впливу їх у особистість чи групу людей, і навіть розробити ефективну систему протидії є дуже важливим. Враховуючи те, що основна відмінність алгоритмів виявлення інформаційних впливів від класичних алгоритмів перевірки гіпотез полягає в тому, що рішення про відсутність вторгнення може бути прийнято лише на останньому доступному кроці спостереження, оскільки ніколи немає гарантій, що воно відбудеться після закінчення спостережень, розглянуті у статті завдання є окремим випадком більш загального виявлення.

Список літератури

1. Зелинский С.А. Информационно-психологические воздействия на массовое сознание. СПб: Скифия, 2008. 403с.
2. Ольшанский Д.В. Психология масс. СПб: Питер, 2002. 403с.
3. Пирцхалава Л.Г., Хорошко В.А., Хохлачова Ю.Е., Шелест М.Е. Информационное противоборство в современных условиях. К: ЦП «Компринт», 2019. 226.с.
4. Вальд А. Последовательный анализ. М: Физматгид, 1999. 330 с.
5. Кокс Д., Льюис П., Статистический анализ последовательных событий. Мир, 1999. 318 с.
6. Ширяев А.Н. Статистический последовательный анализ. Оптимальные правила остановки. М: Наука, 2009. 277 с.
7. Сейдж Э.П., Мелз Дж.Л. Теория оценивания и ее применения в связи и управлений. М: Связь, 2006. 498 с.
8. Бакут П.А., Жулина Ю.В., Иванчук Н.А. Обнаружение движущихся объектов. М: Сов.радио, 2000. 298 с.
9. Опірський І.Р. Оптимізація послідовних процесів прийняття рішень при умовно екстремальній постановці задачі. *Інформаційна безпека*. 2014. Т.16. №.4. С. 120-127.

10. Репин В.Г. Тартановский Г.П. Статистический синтез при априорной неопределенности и адаптация информационных систем. М.; Советское радио, 1977.
11. Pollar P.M. Average Run lengths of an optimal Method of Detecting in Distribution. *Ann.Statist*. 2007. V.15. №2. P. 749-779.
12. Закс Ш. Теория статистических выводов. М: Мир, 1995. 779 с.
13. Pollak M., Siegmund D.A. Diffusion Process and its Applications to detecting a change in the Drift of Brownian Motion. *Biometrika*. 2005. V.72. №2. P. 267-280.
14. Lorden G. Procedures for Reacting to a Change in Distribution. *Ann. Math. Statist*. 2001. V. 42. №6. P. 1897-1908.
15. Moustakides G.N. Optimal Stopping Times for Detecting Changes in Distributions. *Ann. Statist*. 2006. V. 14. №4. P. 1379-1389.

ASSESSMENT OF PROPERTIES OF INFORMATION INTRUSIONS

V.O.Khoroshko, V.D.Kozyura, Yu.E.Khokhlachova, N.S.Vishnevska

National Aviation University,

1, Lubomyra Huzara ave., Kyiv, 03058, Ukraine,
e-mail: professor_va@ukr.net

The article offers an assessment of the properties of information intrusions, as they are random processes and have their own properties. This makes it possible to find out the level of their influence on an individual or a group of people, and to develop an effective countermeasure system. At the same time, psychological influence or information intrusion, which is a component of informational and psychological confrontation, is an influence on people and their groups, which is carried out with the aim of changing the ideological and psychological structures of their consciousness and subconsciousness, transforming emotional states, and stimulating certain types of behavior. The restructuring of the psyche under the influence of informational and psychological influence can be different, both in breadth and in terms of temporal stability. In order to provide informational intrusion and psychological impact, disruptions and transferences must first be induced. The dynamic balance between them is disturbed, a person begins to experience a state of cognitive dissonance. After that, you can encourage him to restore mental balance by changing his former views, beliefs and attitudes, taboos and stereotypes of behavior. Therefore, it is very important to evaluate the properties of informational intrusions or psychological influences, which allow to find out the level of their influence on an individual or a group of people, and to develop an effective countermeasure system. It is shown that all the methods used for the evaluation and analysis of random processes can be used for their analysis. The task of detecting spiking bursts was also examined, which showed that with the help of such signals, observations can be differentiated.

Keywords: cyber security, cyberspace, information warfare, information and psychological warfare, information intrusions, mathematical methods.