DOI 10.15276/imms.v14.no1-2.85
УДК 519.972.5:004.942.001.57

Informatics and Mathematical Methods in Simulation
Vol.14 (2024), No. 1-2, pp. 85-96

ПАРАМЕТРИ МЕТОДУ РУНГЕ-КУТТИ З РІЗНИМ ПОРЯДКОМ ТОЧНОСТІ ПРИ ІНТЕГРУВАННІ РІВНЯНЬ ДИНАМІКИ В ЗАДАЧАХ МОДЕЛЮВАННЯ НЕСТАЦІОНАРНИХ СИСТЕМ

С. А. Положаєнко, А. Ю. Прокофьєв

Національний університет «Одеська політехніка»,
1, Шевченка, пр., м.Одеса, 65044, Україна;
emails: sanp277@gmail.com, fallbrick@gmail.com

При створенні та дослідженнях систем моделювання, управління та ідентифікації вкрай важливими етапами є складання та числове розв'язування рівнянь математичних моделей цих систем, які, зазвичай, представляються в класах диференціальних та інтегральних рівнянь. При цьому вирішальними виявляються питання розробки та дослідження обчислювальних алгоритмів, що реалізують методи числового розв'язування рівнянь математичних моделей систем, зокрема, забезпечення контролю показників точності шуканого розв'язку, а також оцінки впливу відхилень параметрів динамічних систем на їх рух та показники якості. Як при аналізі точності числового дослідження математичних моделей динамічних систем, так і при розв'язуванні задач синтезу останніх на основі умов точності, важливе значення має можливість аналітичного вираження додаткового руху збудженої системи. Математичні моделі нестаціонарних систем, представлені у вигляді диференціальних рівнянь у повних похідних, реалізуються, у переважній більшості прикладних задач, методом Рунге-Кутти різних порядків. Показано, що підвищення продуктивності машинного обрахунку при цьому може бути досягнуто у тому випадку, коли вдається врахувати різницю у швидкості зміни різних груп координат досліджуваної нестаціонарної системи. Виконано постановку та розглянуто можливість раціонального вибору параметрів формул методу Рунге-Кутти, що дозволяє мінімізувати час інтегрування рівнянь математичної моделі системи.

Ключові слова: нестаціонарна система, математична модель, числовий метод, метод Рунге-Кутти, порядок методу, точність розв'язку.

Вступ. В нестаціонарних системах, динаміка яких описується звичайними диференційними рівняннями наступного виду

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = f(t, \mathbf{Y}, \mathbf{P}), \tag{1}$$

$$Y_i(t_s) = P_i \ \left(i = \overline{1, l}\right), \tag{2}$$

$$v \in R_v(v); v \in \{t, \mathbf{Y}, \mathbf{P}\}, \tag{3}$$

де $\mathbf{Y}(t)$ — l-мірний вектор вихідного сигналу нестаціонарної системи, $\mathbf{P}(v)$ — m-мірний вектор параметрів нестаціонарної системи, $R_v(v)$ — області завдання змінних $v = \{\mathbf{Y}, \mathbf{P}\}$, t — незалежний аргумент часу.

як правило, можна виділити декілька груп координат з різними швидкостями зміни та з різко відмінними залежностями координат від аргументу, наприклад, з аперіодичним рухом в одній групі та гармонійним або релаксаційним коливанням — у іншій групі. В якості прикладу можна назвати такі координати, як висота та швидкість літального апарату, які повільно змінюються у порівнянні з кутовими швидкостями обертання навколо центру мас літального апарату і які, у свою чергу, повільно змінюються у порівнянні зі змінними, що описують динаміку приводів керма напрямків, висоти і елеронів.

Очевидно, що для забезпечення бажаної точності моделювання динаміки таких систем необхідно ці групи змінних інтегрувати з різним кроком. Природно при цьому використати числовий метод, який дозволяє легко регулювати крок інтегрування в залежності від швидкостей зміни змінних у відповідній групі координат. Останній вимозі відповідає метод Рунге-Кутти [1 — 4]. Для забезпечення необхідної точності при прийнятних часових витратах на моделювання руху досліджуваної системи з використанням методу Рунге-Куттиє є можливість управляти такими факторами, як *порядок* та *параметри* методу [5]. Конкретизуємо цю можливість за наявної інформації, яку отримано в результаті попередніх досліджень нестаціонарної системи про порядки методу Рунге-Кутти, які забезпечують необхідну точність моделювання відповідної групи рівнянь динаміки.

Мета роботи. Метою роботи є отримання аналітичних виразів, які дають змогу обчислити необхідні порядки методу Рунге-Кутти при розбитті координат досліджуваної системи на групи за швидкістю, що зумовлює визначення кроку інтегрування та забезпечує необхідну точність шуканого розв’язку.

Основна частина. Нехай рівняння досліджуваної нестаціонарної системи розбито по групах координат таким чином, що для кожної наступної групи необхідно збільшення порядку методу. Отримаємо співвідношення для параметрів методу Рунге-Кутти у даному випадку.

Спочатку розглянемо систему, в якій кожну групу параметрів ($g(x), q(x), u(x), w(x)$ — параметри нестаціонарної системи, x — незалежна просторова координата) представлено одним рівнянням:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dg}{dx} &= b(x, g, q, u, w);\ g(x_0) = g_0, \\ \frac{dq}{dx} &= c(x, g, q, u, w);\ q(x_0) = q_0, \\ \frac{du}{dx} &= d(x, g, q, u, w);\ u(x_0) = u_0, \\ \frac{dg}{dx} &= h(x, g, q, u, w);\ w(x_0) = w_0. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Нехай числовий розв’язок системи (4) отримується достатньо точним при використанні методу Рунге-Кутти першого, другого, третього та четвертого порядків для змінних $g(x), q(x), u(x), w(x)$, відповідно. За уяви відповідної гладкості розв’язку системи (4) можемо записати наступні вирази для приростів функцій $g(x), q(x), u(x), w(x)$ на інтервалі $[x_i, x_{i+1}]$:

$$\left.\begin{aligned} \Delta g_i &= g(x_i + s) - g(x_i) = g' \cdot s + O(s^2), \\ \Delta q_i &= q(x_i + s) - q(x_i) = q' \cdot s + \frac{s}{2} q'' + O(s^3), \\ \Delta u_i &= u(x_i + s) - u(x_i) = q' \cdot s + \frac{s^2}{2} q'' + \frac{s^3}{6} u''' + O(s^4), \\ \Delta w_i &= w(x_i + s) - w(x_i) = w' \cdot s + \frac{s^2}{2} w'' + \frac{s^3}{6} w''' + \frac{s^4}{24} w^{(4)} + O(s^5). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Розрахункові приріст розв’язку системи (4) на інтервалі $[x_i, x_{i+1}]$ відшукуються у вигляді [5, 6]

$$\left.\begin{aligned}\Delta g &= a_{11}\cdot n_1,\\ \Delta q &= e_{21}\cdot m_1 + e_{22}\cdot m_2,\\ \Delta u &= s_{31}\cdot\lambda_1 + s_{32}\cdot\lambda_2 + s_{33}\cdot\lambda_{31},\\ \Delta w &= p_{41}\cdot k_1 + p_{42}\cdot k_2 + p_{43}\cdot k_3 + p_{44}\cdot k_4,\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

де

$$n_1 = sb_i = sb(x_i, g_i, q_i, u_i, w_i), \tag{7}$$

$$\left.\begin{aligned}m_1 &= sc_i = sc(x_i, g_i, q_i, u_i, w_i),\\ m_2 &= sc(x_i + \alpha_2 s, g_i + \xi_{21} n_1, q_i + \delta_{21} m_1, u_i + \gamma_{21}\lambda_1, w_i + \beta_{21} k_1),\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

$$\left.\begin{aligned}\lambda_1 &= sd_i = sd(x_i, g_i, q_i, u_i, w_i),\\ \lambda_2 &= sd(x_i + \alpha_2 s, g_i + \xi_{21} n_1, q_i + \delta_{21} m_1, u_i + \gamma_{21}\lambda_1, w_i + \beta_{21} k_1),\\ \lambda_3 &= sd\left(x_i + \alpha_3 s, g_i + \xi_{31} n_1, q_i + \sum_{j=1}^{2}\delta_{3j} m_j, u_i + \sum_{j=1}^{2}\gamma_{3j}\lambda_j, w_i + \sum_{j=1}^{2}\beta_{3j} k_j\right),\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned}k_1 &= sf_i = sf(x_i, g_i, q_i, u_i, w_i),\\ k_2 &= sh(x_i + \alpha_2 s, g_i + \xi_{21} n_1, q_i + \delta_{21} m_1, u_i + \gamma_{21}\lambda_1, w_i + \beta_{21} k_1),\\ k_3 &= sh\left(x_i + \alpha_3 s, g_i + \xi_{31} n_1, q_i + \sum_{j=1}^{2}\delta_{3j} m_j, u_i + \sum_{j=1}^{2}\gamma_{3j}\lambda_j, w_i + \sum_{j=1}^{2}\beta_{3j} k_j\right)\\ k_4 &= sh\left(x_i + \alpha_4 s, g_i + \xi_{41} n_1, q_i + \sum_{j=1}^{3}\delta_{4j} m_j, u_i + \sum_{j=1}^{3}\gamma_{4j}\lambda_j, w_i + \sum_{j=1}^{3}\beta_{4j} k_j\right).\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Відповідно до методу Рунге-Кутти параметри розрахункових формул (6) — (10) визначаються з умов:

$$\begin{aligned}\Delta\varpi_i - \varpi &= O\left(s^{\sigma_\varpi}\right),\\ \varpi \in \{g, q, u, w\},&\ \sigma_\varpi \in \{2,3,4,5\}.\end{aligned} \tag{11}$$

Дотримуючись [6], будемо використовувати оператор диференціювання:

$$D_\sigma[\varpi] = \left(\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial g} + c\frac{\partial}{\partial q} + d\frac{\partial}{\partial u} + h\frac{\partial}{\partial w}\right)^{\sigma}[\varpi]. \tag{12}$$

Позначивши

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{\Theta} &= (\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \Theta_4)^{\mathrm{T}} = (g, q, u, w)^{\mathrm{T}},\\ \mathbf{F} &= (F_1, F_2, F_3, F_4)^{\mathrm{T}} = (b, s, d, h)^{\mathrm{T}},\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

в силу системи (4) можемо записати:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d\Theta_j}{dx} = F_j(x,\boldsymbol{\Theta});\ j=\overline{1,4},\\
&\frac{d^2\Theta_j}{dx^2} = D_1[F_j];\ j=\overline{1,4},\\
&\frac{d^3\Theta_j}{dx^3} = D_2[F_j] + \sum_{\kappa=1}^{n} D_1[F_j]\cdot\frac{\partial F_j}{\partial\Theta_\kappa};\ j=\overline{1,4},\\
&\frac{d^4\Theta_j}{dx^4} = D3[F_j] + \sum_{\kappa=1}^{n}\{3\cdot D_1[F_\kappa]\cdot D_1\left[\frac{\partial F_j}{\partial\Theta_\kappa}\right] +\\
&+ D_2[F_\kappa]\cdot\frac{\partial F_j}{\partial\Theta_\kappa} + D_1[F_\kappa]\cdot\sum_{\eta=1}^{n}\left(\frac{\partial F_j}{\partial\Theta_\kappa}\cdot\frac{\partial F_\eta}{\partial\Theta_\kappa}\right);\ j=\overline{1,4}.
\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Для системи (4) $n=4$.

Розкладемо функції $m_2,\lambda_2,\lambda_3,k_2,k_3,k_4$ в ряди Тейлора в околі ϖ_i $(\varpi\in\{g,q,u,w\})$.

Використовуючи вирази (12) — (14) для відповідних похідних та приводячи в (11) члени з однаковими степенями $s^\sigma\ (\sigma<\sigma_\varpi)$, отримаємо описані нижче співвідношення, що визначають шукані параметри розрахункових формул (5) — (10).

$$\left.\begin{aligned}
r_2 &= (\alpha_2,\xi_{21},\delta_{21},\gamma_{21},\beta_{21}),\\
r_3 &= (\alpha_3,\xi_{31},\delta_{31}+\delta_{32},\gamma_{31}+\gamma_{32},\beta_{31}+\beta_{32}),\\
r_3 &= (\alpha_4,\xi_{41},\delta_{41}+\delta_{42},\gamma_{41}+\gamma_{42}+\gamma_{43},\beta_{41}+\beta_{42}+\beta_{43}),
\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

$$a_{11}=1; \tag{16}$$

$$e_{21}+e_{22}=1,\ 2e_{22}\cdot r_2=1; \tag{17}$$

$$\left.\begin{aligned}
&s_{31}+s_{32}+s_{33}=1,\\
&\sum_{\kappa=2}^{3} s_{3\kappa}\cdot\prod_{i=1}^{\sigma-1} r_\kappa[j_i] = \frac{1}{\sigma}\left(\sigma\in\{2,3\}, j_1, j_2=\overline{1,5}\right),\\
&s_{33}\cdot\gamma_{32}\cdot r_2=\frac{1}{6}
\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

$$s_{33}\cdot\delta_{32}\cdot r_2=\frac{1}{6};\ s_{33}\cdot\beta_{32}\cdot r_2=\frac{1}{6}, \tag{19}$$

$$D_1[b]\cdot\frac{\partial d}{\partial g}\approx 6s\cdot \tag{20}$$

З (18), (19) при $\alpha_2\notin\{0,2/3\},\alpha_3\neq 0,\alpha_2\neq\alpha_3$:

$$\left.\begin{aligned}
&s_{31}=\frac{6\alpha_2\alpha_3-3(\alpha_2+\alpha_3)+2}{6\alpha_2\alpha_3},\\
&s_{32}=\frac{3\alpha_3-2}{6\alpha_2(\alpha_3-\alpha_2)},\ s_{33}=\frac{2-3\alpha_2}{6\alpha_2(\alpha_3-\alpha_2)},\\
&\xi_{21}=\delta_{21}=\gamma_{21}=\beta_{21}=\alpha_2,\ \xi_{31}=\alpha_3,\\
&\gamma_{31}=\frac{\alpha_3[3\alpha_2(\alpha_2-1)+\alpha_3]}{\alpha_2(3\alpha_2-2)},\ \gamma_{32}=\frac{\alpha_3(\alpha_2-\alpha_3)}{\alpha_2(3\alpha_2-2)};
\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

$$\delta_{31} = \frac{\alpha_3\left[\alpha_2(3\alpha_2 - 2) - (\alpha_2 - \alpha_3)\right]}{\alpha_2(3\alpha_2 - 2)},\ \delta_{32} = \frac{\alpha_3(\alpha_2 - \alpha_3)}{\alpha_2(3\alpha_2 - 2)}; \qquad (22)$$

$$\beta_{31} = \frac{\alpha_3\left[\alpha_2(3\alpha_2 - 2) - (\alpha_2 - \alpha_3)\right]}{\alpha_2(3\alpha_2 - 2)},\ \beta_{32} = \frac{\alpha_3(\alpha_2 - \alpha_3)}{\alpha_2(3\alpha_2 - 2)}; \qquad (23)$$

$$\left.\begin{array}{c}
\sum_{\kappa=1}^{4} p_{4\kappa} = 1, \\
\sum_{\kappa=1}^{4} p_{4\kappa} \cdot \prod_{i=1}^{\sigma-1} r_\kappa[j_i] = \frac{1}{\sigma}\ (\sigma \in \{2, 3, 4\}), \\
p_{43} \cdot \beta_{32} \cdot r_3^\kappa \cdot \prod_{i=1}^{\sigma} r_2[j_i] + p_{44} \cdot r_4^\kappa \left(\beta_{42} \prod_{i=1}^{\sigma} r_\kappa[j_i] + \beta_{43} \prod_{i=1}^{\sigma} r_\kappa[j_i]\right) = R_{\sigma\kappa} \\
(\sigma = 1 \wedge \kappa < 2 \vee \sigma = 2 \wedge \kappa = 0),\ R_{\sigma\kappa} = \frac{1}{2\sigma(3+\kappa)};\ j_1, j_2 = 1,5, \\
p_{44} \cdot \beta_{32} \cdot \beta_{43} \cdot r_2 = 1/24.
\end{array}\right\} \qquad (24)$$

Також, на підставі виразів (18), (19), можна записати наступні системи рівнянь.

$$\left.\begin{array}{c}
p_{43} \cdot \gamma_{32} \cdot r_3^\kappa \cdot \prod_{i=1}^{\sigma} r_2[j_i] + p_{44} \cdot r_4^\kappa \left(\gamma_{42} \prod_{i=1}^{\sigma} r_\kappa[j_i] + \gamma_{43} \prod_{i=1}^{\sigma} r_\kappa[j_i]\right) = R_{\sigma\kappa} \\
(\sigma = 1 \wedge \kappa < 2 \vee \sigma = 2 \wedge \kappa = 0), \\
R_{\sigma\kappa} = \frac{1}{2\sigma(3+\kappa)};\ j_1, j_2 = 1,5, \\
p_{44} \cdot \gamma_{43} \cdot \gamma_{32} \cdot r_2 = 1/24, \\
p_{44} \cdot \beta_{43} \cdot \gamma_{32} \cdot r_2 = 1/24, \\
p_{44} \cdot \gamma_{43} \cdot \beta_{32} \cdot r_2 = 1/24;
\end{array}\right\} \qquad (25)$$

$$\left.\begin{array}{c}
(p_{43} \cdot \delta_{32} + p_{44} \cdot \delta_{42}) \cdot r_2 = 1/6, \\
(p_{43} \cdot \delta_{32} \cdot r_3 + p_{44} \cdot \delta_{42} \cdot r_4) \cdot r_2[j] = 1/8\ (j = \overline{1,5}), \\
(p_{43} \cdot \delta_{32} + p_{44} \cdot \delta_{42}) \cdot r_2[i] \cdot r_2[j] = 1/12\ (i, j = \overline{1,5}), \\
p_{44} \cdot \beta_{43} \cdot \delta_{32} \cdot r_2 = 1/24, \\
p_{44} \cdot \gamma_{43} \cdot \delta_{32} \cdot r_2 = 1/24;
\end{array}\right\} \qquad (26)$$

$$\left.\begin{array}{c}
D_1[b] \cdot \frac{\partial h}{\partial g} \approx 6s^2, \\
D_1[b] \cdot D_1\left[\frac{\partial h}{\partial g}\right] \approx 8s^2, \\
D_2[b] \cdot \frac{\partial h}{\partial g} \approx 24s, \\
D_1[F_\kappa] \cdot \frac{\partial h}{\partial \Theta_j} \cdot \frac{\partial F_j}{\partial \Theta_\kappa} \approx 24s,\ (\kappa = 1 \wedge j < 5 \vee \kappa > 1 \wedge j < 3).
\end{array}\right\} \qquad (27)$$

Щоб отримати співвідношення для загального випадку розрахункових параметрів виду (6) — (10), розглянемо систему

$$\frac{d\Theta}{dx}=F(x,\Theta), \tag{28}$$

в кожній групі якої по два рівняння:

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{\Theta}&=(G,g,Q,q,U,u,W,w)^{\mathrm{T}},\\ \mathbf{F}&=(a,b,c,d,e,f)^{\mathrm{T}}.\end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Позначимо параметри для розрахункових приростів $\Delta\mathbf{\Psi}\left(\mathbf{\Psi}\in\{G,Q,U,W\}\right)$ знову уведених змінних G,Q,U,W так, як у (6) із заміною у останніх рядкових літер заголовними.

Аналогічно (15) позначимо

$$\left.\begin{aligned}&r_j=\left(\alpha_j,\mathrm{E}_{j1},\xi_{j1},\sum_{i=1}^{i_3}\Delta_{ji},\sum_{i=1}^{i_4}\delta_{ji},\sum_{i=1}^{i_5}\Gamma_{ji},\sum_{i=1}^{i_6}\gamma_{ji},\sum_{i=1}^{i_7}\mathrm{B}_{ji},\sum_{i=1}^{i_8}\beta_{ji}\right)\\ &(j=2,3,4;\text{ якщо } j=4\wedge 2<\kappa<5,\text{ то } \mathrm{i}_\kappa=2,\text{ інакше } i_\kappa j-1).\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Тоді можна записати:

$$N_1=sa_i,\ n_1=sb_1, \tag{31}$$

$$M_1=s\sigma;$$

$$\begin{aligned}M_2=s\sigma(&x_i+\alpha_2\cdot s,G_i+\mathrm{E}_{21}\cdot N_1,g_i+\xi_{21}\cdot n_1,Q_i+\Delta_{21}\cdot M_1,g_i+\delta_{21}\cdot m_1,\\ &U_i+\Gamma_{21}\cdot\Lambda_i,u_i+\gamma_{21}\div\lambda_1\cdot W_1+\mathrm{B}_{21}\cdot K_1,w_i+\beta_{21}\cdot k_1)=s\sigma(x_i,\Theta_i,r_2);\end{aligned} \tag{32}$$

$$m_1=sc_1,\ m_2=sc(x_i,\Theta_i,r_2); \tag{33}$$

$$\Lambda_i=s\cdot h_i,\ \Lambda_j=s\cdot h(x_j,\Theta_{i,}\ r_j)(j=2,3); \tag{34}$$

$$\lambda_i=s\cdot g_i,\ \lambda_j=s\cdot g(x_j,\Theta_{i,}\ r_j)(j=2,3); \tag{35}$$

$$K_i=s\cdot e_i,\ K_j=s\cdot e(x_j,\Theta_{i,}\ r_j)(j=2,3,4); \tag{36}$$

$$k_i=s\cdot f_i,\ k_j=s\cdot f(x_j,\Theta_{i,}\ r_j)(j=2,3,4); \tag{37}$$

Як і в (11), (12) маємо:

$$\Delta\varpi_i=\Delta\varpi+O\left(s^{\sigma\varpi}\right),$$

$$\varpi\in\{G,g,Q,q,U,u,W,w\}, \tag{38}$$

$$D_j[\varpi]=\left(\frac{\partial}{\partial x}+\sum_{j=1}^{n}F_j\cdot\frac{\partial}{\partial\Theta_j}\right)^{\sigma}[\varpi]. \tag{39}$$

Для системи (28) $n=8$.

Повторюючи процедуру отримання співвідношень (16) — (27), можна переконатися у справедливості інтерпретації співвідношень (16) — (27) для системи (28), яка пояснюється нижче.

У подальших розмірковуваннях вагові коефіцієнти t_{ij}, s_{ij}, p_{ij} для параметрів (32), (34), (36) поміняємо на коефіцієнти T_{ij}, S_{ij}, P_{ij}, відповідно.

Для груп рівнянь, що відповідають компонентам F_j системи (28) та таких, що розв'язуються за умовою методом не нижче четвертого порядку, повинні виконуватися, по-перше, співвідношення (24) — (26), а також будемо вимагати при цьому заміну в (25) величин ϖ на певне їх наближення $\widehat{\varpi}$. По друге, повинні виконуватися співвідношення (24) — (26) із заміною в них коефіцієнтів p_{ij} на P_{ij} (також в вимогою заміну в (25) величин ϖ на певне їх наближення $\widehat{\varpi}$). По-третє, спільний розв'язок методом четвертого порядку не одного, а двох рівнянь четвертої групи системи (28) призводить до необхідності виконання співвідношень

$$\left.\begin{array}{c} P_{43}\cdot\beta_{32}\cdot r_3^{\kappa}\prod\limits_{i=1}^{\sigma} r_2[j_i]+P_{44}\cdot r_4^{\kappa}\left(\beta_{42}\prod\limits_{i=1}^{\sigma} r_2[j_i]+\beta_{42}\cdot\prod\limits_{i=1}^{\sigma} r_3[j_i]\right)=\dfrac{1}{2\sigma(3+\kappa)} \\ (\sigma=1\wedge\kappa<2\vee\sigma=2\wedge\kappa=0,\ j_1,j_2<n+2), \\ P_{44}\cdot\beta_{32}\cdot\beta_{43}\cdot r_2=1/24, \\ P_{44}\cdot\beta_{32}\cdot \mathrm{B}_{43}\cdot r_2=1/24, \\ P_{44}\cdot \mathrm{B}_{32}\cdot\beta_{43}\cdot r_2=1/24, \end{array}\right\} \quad (40)$$

подібних залежностям (25). Наостанок, крім як описаним співвідношенням, розрахункові параметри (32) — (37) для системи (28) повинні задовольняти аналогічним (19), (22), (23), (26), (27) залежностям, які визначають узгодження розрахункових параметрів для груп рівнянь, які розглядається та входять (в свою чергу) до системи, що інтегрується:

$$\Delta_{32}\cdot r_2=\delta_{32}\cdot r_2=\Gamma_{32}\cdot r_2=\gamma_{32}\cdot r_2\mathrm{B}_{32}\cdot r_2=\beta_{32}\cdot r_2=\frac{1}{6S_{33}}\cdot \quad (41)$$

$$\left.\begin{array}{c} \left(P_{43}\cdot\Delta_{32}\cdot r_3^{\kappa}+P_{44}\cdot\Delta_{42}\cdot r_4^{\kappa}\right)\cdot\prod\limits_{i=}^{\sigma} r_2[j_i]=R_{\sigma\kappa}, \\ \left(P_{43}\cdot\Delta_{32}\cdot r_3^{\kappa}+P_{44}\cdot\delta_{42}\cdot r_4^{\kappa}\right)\cdot\prod\limits_{i=}^{\sigma} r_2[j_i]=R_{\sigma\kappa}, \\ \varpi_{43}\cdot\Gamma_{32}\cdot\prod\limits_{i=1}^{\sigma} r_2[j_i]+\varpi_{44}\left(\Gamma_{42}\cdot\prod\limits_{i=}^{\sigma} r_2[j_i]+\Gamma_{43}\cdot\prod\limits_{i=}^{\sigma} r_3[j_i]\right)=R_{\sigma\kappa}, \\ \varpi_{43}\cdot\gamma_{32}\cdot\prod\limits_{i=1}^{\sigma} r_2[j_i]+\varpi_{44}\left(\gamma_{42}\cdot\prod\limits_{i=}^{\sigma} r_2[j_i]+\gamma_{43}\cdot\prod\limits_{i=}^{\sigma} r_3[j_i]\right)=R_{\sigma\kappa}, \\ \varpi_{43}\cdot\mathrm{B}_{32}\cdot\prod\limits_{i=1}^{\sigma} r_2[j_i]+\varpi_{44}\left(\mathrm{B}_{42}\cdot\prod\limits_{i=}^{\sigma} r_2[j_i]+\mathrm{B}_{43}\cdot\prod\limits_{i=}^{\sigma} r_3[j_i]\right)=R_{\sigma\kappa}, \\ \varpi_{43}\cdot\beta_{32}\cdot\prod\limits_{i=1}^{\sigma} r_2[j_i]+\varpi_{44}\left(\beta_{42}\cdot\prod\limits_{i=}^{\sigma} r_2[j_i]+\beta_{43}\cdot\prod\limits_{i=}^{\sigma} r_3[j_i]\right)=R_{\sigma\kappa}, \\ \varpi_{43}=P_{43}\cdot r_3^{\kappa},\ \varpi_{44}=P_{44}\cdot r_4^{\kappa}, \\ R_{\sigma\kappa}=\dfrac{1}{2\sigma(3+\kappa)}, \\ (\sigma=1\wedge\kappa<2\vee\sigma=2\wedge\kappa=0,\ j_1,j_2<n+2), \end{array}\right\} \quad (42)$$

$$\left.\begin{array}{c}
\Gamma_{43}\cdot\Delta_{32}=\gamma_{43}\cdot\Delta_{32}=\mathrm{B}_{43}\cdot\Delta_{32}=\beta_{43}\cdot\Delta_{32}=\dfrac{1}{24P_{44}\cdot r_2[j]},\\
\Gamma_{43}\cdot\delta_{32}=\gamma_{43}\cdot\delta_{32}=\mathrm{B}_{43}\cdot\delta_{32}=\beta_{43}\cdot\delta_{32}=\dfrac{1}{24P_{44}\cdot r_2[j]},\\
\Gamma_{43}\cdot\Gamma_{42}=\gamma_{43}\cdot\Gamma_{32}=\mathrm{B}_{43}\cdot\Gamma_{32}=\beta_{43}\cdot\Gamma_{32}=\dfrac{1}{24P_{44}\cdot r_2[j]},\\
\Gamma_{43}\cdot\gamma_{32}=\gamma_{43}\cdot\Delta_{32}=\mathrm{B}_{43}\cdot\gamma_{32}=\beta_{43}\cdot\gamma_{32}=\dfrac{1}{24P_{44}\cdot r_2[j]},\\
\Gamma_{43}\cdot\mathrm{B}_{32}=\gamma_{43}\cdot\mathrm{B}_{32}=\mathrm{B}_{43}\cdot\mathrm{B}_{32}=\beta_{43}\cdot\mathrm{B}_{32}=\dfrac{1}{24P_{44}\cdot r_2[j]},\\
\Gamma_{43}\cdot\beta_{32}=\gamma_{43}\cdot\beta_{32}=\mathrm{B}_{43}\cdot\beta_{32}=\beta_{43}\cdot\beta_{32}=\dfrac{1}{24P_{44}\cdot r_2[j]},\\
\left(j=\overline{1,n+1}\right);
\end{array}\right\} \tag{43}$$

$$\left.\begin{array}{c}
D_1[F_j]\cdot\dfrac{\partial F_\kappa}{\partial\Theta_j}\approx 6s\ (\kappa=5\wedge j=1\vee\kappa=6\wedge j=2),\\
D_1[F_j]\cdot D_1\left[\dfrac{\partial F_\kappa}{\partial\Theta_j}\right]\approx 8s\ (\kappa>6\wedge j<3),\\
D_1[F_j]\cdot\dfrac{\partial F_\kappa}{\partial\Theta_j}\approx 24s\ (j<3\wedge\kappa>6),\\
D_1[F_j]\cdot\dfrac{\partial F_\kappa}{\partial\Theta_j}\cdot\dfrac{\partial F_j}{\partial\Theta_\kappa}\approx 24s\ ,\\
\left(\kappa<3\wedge j=\overline{1,n}\vee\kappa>2\wedge j<5\right).
\end{array}\right\} \tag{44}$$

З отриманих співвідношень видно, що вибір однакових параметрів $\bar{r}_j=r_j$, $\hat{r}_j=r_j$, $\tilde{r}_j=r_j$ для всіх рівнянь відповідної групи забезпечує можливість застосування розрахункових співвідношень (16) — (26) для системи з довільним числом рівнянь у кожній групі змінних.

Отримані співвідношення містять той окремий випадок, коли використовуються розрахункові формули, що забезпечують один порядок похибки на кроці інтегрування для всіх рівнянь системи. При цьому із співвідношень (8) — (17) отримуються розрахункові формули другого порядку, з (9) — (18) — третього порядку, а з (10) — (24) — четвертого порядку. Зазначимо, що ці співвідношення обмежують вектор вільних параметрів розрахункових формул наступним чином:

— Для порядку методу $\sigma=2$:

$$\alpha_2\neq 0,\ \delta_{21}=\alpha_2,\ e_{22}=\frac{1}{2\alpha_2},\ e_{21}=1-e_{22}. \tag{45}$$

— Для порядку методу $\sigma=3$:

$$\alpha_2\neq 0б\ \gamma_{32}\neq 0.$$

Розглянемо можливості, які є при цьому:

1. $\alpha_2=\alpha_3=2/3,\ \gamma_{31}=2/3-\gamma_{32}$.

Ця умова тягне за собою вибір

$$s_{33} = \frac{1}{4\gamma_{32}},\ s_{32} = 3/4 - s_{33},\ s_{31} = 1/4. \tag{46}$$

2. $\alpha_2 = 2/3,\ \alpha_3 = 0,\ \gamma_{31} = 2/3 - \gamma_{32},\ s_{33} = \dfrac{1}{4\gamma_{32}},\ s_{32} = 1/4,$

$$s_{31} = 1/4 - s_{33}. \tag{47}$$

3. Можливий також наступний випадок параметрів

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_2 = 1, \alpha_3 \notin \{0, 2/3, 1\}, \gamma_{31} = \alpha_3^2, \gamma_{32} = \alpha_3(1-\alpha_3),\\ s_{33} = \dfrac{1}{6\alpha_3(1-\alpha_3)}, s_{32} = \dfrac{2-3\alpha_3}{6(1-\alpha_3)}, s_{33} = \dfrac{3\alpha_3 - 1}{6\alpha_3};\end{array}\right\} \tag{48}$$

4. $\alpha_3 = 1,\ \alpha_2 \notin \{0, 2/3, 1\}.$
5. $\alpha_2 \notin \{0, 2/3, 1\},\ \alpha_3 \notin \{0, 2/3, 1\},\ \alpha_2 \neq \alpha_3.$

При цьому параметри γ_{31}, γ_{32} та вагові коефіцієнти s_{31}, s_{32}, s_{33} обчислюються за формулами (21).

— Для порядку методу $\sigma = 4$ система (24) несумісна при
$\alpha_2 = 0 \vee \alpha_3 = 1 \vee \alpha_3 \wedge \alpha_2 \neq 1/2 \vee \alpha_2 = 1/2 \wedge \alpha_3 \notin \{0, 1/2\}.$

Залишаються наступні можливості:

1. $\alpha_2 = \alpha_3 = 1/2.$

Цей вибір дає параметри розрахункової формули четвертого порядку, які найбільш широке використовуються:

$$\left.\begin{array}{c}\beta_{21} = \beta_{32} = 1/2, \alpha_4 = 1, \beta_{31} = \beta_{41} = \beta_{42} = 0, \beta_{43} = 1,\\ p_{41} = p_{44} = 1/6,\ p_{42} = p_{43} = 1/3.\end{array}\right\} \tag{49}$$

2. $\alpha_2 = 1/2,\ \alpha_3 = 0,\ \beta_{32} \neq 0.$

Цей вибір дає такі параметри:

$$\left.\begin{array}{c}\beta_{31} = -\beta_{32}, \beta_{41} = -[1/2(1 + 1/\beta_{32})], \beta_{42} = 3/2, \beta_{43} = 1/2\beta_{32},\\ p_{41} = [1/6(1 - 1/2\beta_{32})],\ p_{42} = 2/3,\ p_{43} = 1/12\beta_{32},\ p_{44} = 1/6.\end{array}\right\} \tag{50^1}$$

3. $\alpha_2 = 1,\ \alpha_3 = 1/2,\ p_{44} \neq 0.$

Цей вибір дає такі параметри:

$$\left.\begin{array}{c}\beta_{31} = 3/8, \beta_{41} = 1/8, \beta_{41} = [1 - (1/4p_{44})], \beta_{42} = -1/12p_{44}, \beta_{43} = -1/3p_{44},\\ p_{41} = 1/6,\ p_{42} = 1/6 - p_{44},\ p_{43} = 1/3..\end{array}\right\} \tag{50^2}$$

4. Можливий також наступний випадок параметрів

$$\left.\begin{array}{c}
\alpha_2 \notin \{0, 1/2, 1\}, \alpha_3 \notin \{0, 1/2, 1\}, \alpha_2 \neq \alpha_3. \\
p_{42} = 1/12\alpha_2 \cdot (1 - 2\alpha_3)/(\alpha_2 - \alpha_3) \cdot 1/(1 - \alpha_2), \\
p_{43} = 1/12\alpha_3 \cdot (12\alpha_2 - 1)/(\alpha_2 - \alpha_3) \cdot 1/(1 - \alpha_3), \\
p_{44} = 1/12 \cdot [3 + 6\alpha_2\alpha_3 - 4(\alpha_2 + \alpha_3)/(1 - \alpha_2)(1 - 2\alpha_3)], \\
\beta_{32} = [1/24(1 - \alpha_3) \cdot \alpha_2 \cdot p_{43}], \beta_{31} = \alpha_3 - \beta_{32}, \\
\beta_{42} = \{[2 - 4(1 - \alpha_3) \cdot \alpha_3 - (\alpha_2 + \alpha_3)]/24(1 - \alpha_3) \cdot (\alpha_2 - \alpha_3) \cdot \alpha_2 \cdot p_{44}\}, \\
\beta_{43} = \{(2\alpha_2 - 1)/[12\alpha_3 \cdot (\alpha_2 - \alpha_3) \cdot p_{44}]\}, \beta_{41} = 1 - (\beta_{42} + \beta_{43}).
\end{array}\right\} \quad (51)$$

Із використанням отриманих співвідношень для конкретної задачі (1) — (3), що досліджується, можна віднайти розбиття ММ на групи, які при моделюванні системи *мінімізують час розв'язування задачі Коші*, задовольняючи вимогам точності щодо розв'язку цієї задачі.

Необхідно зазначити дві обставини. Отримані співвідношення (16) — (43) для розрахункових формул (31) — (37) різник порядків, що застосовуються до відповідних груп рівнянь ММ досліджуваної системи (1) — (3), є вірними при нехтуванні у (38) величинами $O\left(s^{\sigma\varpi}\right)$ і, крім того, за умов (20), (27), (44).

Також, для будь-яких поєднань порядків розрахункових формул (31) — (37), що застосовуються, можна задовольняти співвідношенням (16) — (43), крім поєднання формул 3-го порядку, що застосовуються до однієї групи рівнянь, і 4-го порядку, що застосовуються до іншої групи рівнянь. У цьому випадку залишається невиконаним хоча б одне із співвідношень (18) — (26).

Наприклад, вибір (49) параметрів розрахункової формули 4-го порядку разом з параметрами

$$\left.\begin{array}{c}
\alpha_2 = 1/3, \alpha_3 = 1/2, \beta_{32} = 1/4, \gamma_{32} = 3/8, \\
\gamma_{32} = 3/4, \gamma_{42} = 3/2, \gamma_{43} = 2.
\end{array}\right\} \quad (52)$$

задовольняє усім співвідношенням (17) — (25), крім

$$s_{33} \cdot \beta_{32} \cdot \alpha_2 = C_к. \quad (53)$$

Обрані параметри дають значення $C_к = 1/4$ замість потрібного $C_к = 1/6$. Зазначимо, що $C_к \to 1/6$ при $\alpha_2 \to 0$, але при цьому зростають ваги s_{31} та s_{32}, і зменшення цієї компоненти методичної похибки може призвести до збільшення обчислювальних похибок визначення шуканих приросту $\Delta\varpi$.

Зробивши замість (52) наступний вибір параметрів:

$$\left.\begin{array}{c}
\alpha_2 = 1/16, \alpha_3 = 3/4, \beta_{31} = 9/56, \beta_{32} = 33/56, \\
\gamma_{31} = -153/58, \gamma_{32} = 33/7, \\
\delta_{21} = 1/2, \gamma_{31} = -7/2, \gamma_{32} = 4, \gamma_{41} = 7/3, \gamma_{42} = -24/11, \gamma_{43} = 28/33, \\
s_{31} = -5/9, s_{32} = 32/33, s_{33} = 58/99,
\end{array}\right\} \quad (54)$$

отримуємо у (53) значення $C_к = 29/28 \cdot 1/6$, що є близьким до необхідного $C_к = 1/6$.

Наведені співвідношення (16) — (43) дають можливість для конкретної задачі моделювання нестаціонарної системи, заданою ММ виду (1) — (3), та оцінки точності характеристик цієї досліджуваної системи побудувати блок програм, що реалізує пошук значень параметрів розрахункових формул (31) — (37), які мінімізують часові витрати при допустимій точності оцінок необхідних характеристик. Долучення цього блоку у комплект програм забезпечення імітаційного моделювання, дає можливість оцінки необхідних характеристик якості досліджуваних нестаціонарних (динамічних) систем достатньо загального виду з придатними точністю та швидкодією системи моделювання (тобто системи, що реалізує ММ виду (1) — (3)).

Висновок. Визначено, що при реалізації ММ нестаціонарних систем в задачах моделювання, управління та ідентифікації ефективним числовим методом є методо Рунге-Кутти, який забезпечує отримання необхідної точності розв’язку задачі. При цьому зазначено, що на досягнення бажаної точності розв’язку значно впливає крок інтегрування, який, в свою чергу, визначається динамічними властивостями досліджуваної системи. За наявності в ММ нестаціонарної системи параметрів, що суттєво відмінним чином характеризують її динаміку, ускладнюється процедура вибору кроку інтегрування в методі Рунге-Кутти, який би забезпечував необхідну точність отриманого розв’язку.

Показано, що дієвим шляхом при отриманні бажаної точності розв’язку, є розбиття вихідної задачі для попередньо виділених груп координат (параметрів) з різними швидкостями зміни та відмінними залежностями координат від аргументу в ММ нестаціонарної системи. Це дає змогу варіювання при виборі кроку інтегрування та порядку методу Рунге-Кутти для кожної з виділених груп параметрів.

Отримано розрахункові вирази щодо обчислення необхідних порядків числового методу при розбитті на групи параметрів, які (порядки) зумовлюють аналітичне визначення кроку інтегрування та забезпечують необхідну точність шуканого розв’язку.

На тестовому прикладі показано застосування отриманих розрахункових формул і можливість проведення аналізу щодо ефективності останніх при виборі порядку методу та забезпеченні бажаної точності розв’язку задачі реалізації ММ нестаціонарної системи.

Список літератури

1. Chan R., Tsai A. On explicit two-derivative Runge – Kutta methods. *Numerical Algorithms*. 2010. Vol. 53. P. 171-194.
2. Okten Turaci M., Ozis T. Derivation of three-derivative Runge – Kutta methods. *Numerical Algorithms*. 2017. Vol. 74(1). P. 247-265.
3. Iserles A., Norsett S.P. On the theory of parallel Runge-Kutta methods. *IMA J. Numer. Anal.* 2009. Vol. 10. P.463-488.
4. Owren B., Zennaro M. Derivation of efficient continuous explicit Runge – Kutta methods. *SIAM J. Sci. and Stat. Comput.* 2016. Vol. 13. No. 6. P. 1488–1501.
5. Hairer E. Order conditions for numerical methods for partitioned ordinary differential equations. *Numer. Math.* 2011. Vol. 36. P. 431–445.
6. Dormand, J. R., El-Mikkawy M.E.A., Prince P. J. Families of Runge – Kutta Formulas. *IMA J. Numer. Anal.* 2007. Vol. 7. P. 235–250.

PARAMETERS OF THE RUNGE-KUTTA METHOD WITH DIFFERENT ORDER OF ACCURACY IN THE INTEGRATION OF DYNAMICS EQUATIONS IN THE PROBLEMS OF MODELLING NON-STATIONARY SYSTEMS

S. A. Polozhaenko, A. Yu. Prokofiev

National Odesa Polytechnic University,
1, Shevchenko Ave., Odesa, 65044, Ukraine
emails: sanp277@gmail.com, fallbrick@gmail.com

In the creation and research of modeling, control and identification systems, the most important stages are the formulation and numerical solution of equations of mathematical models of these systems, which are usually represented in the classes of differential and integral equations. At the same time, the issues of developing and researching computational algorithms that implement methods for numerical solution of equations of mathematical models of systems, in particular, ensuring control over the accuracy of the desired solution, as well as assessing the impact of deviations of parameters of dynamic systems on their movement and quality indicators, are crucial.

Both in analyzing the accuracy of numerical study of mathematical models of dynamic systems and in solving problems of synthesis of the latter based on accuracy conditions, the possibility of analytical expression of additional motion of the excited system is of great importance.

Mathematical models of non-stationary systems, represented in the form of differential equations in full derivatives, are implemented in the vast majority of applied problems by the Runge-Kutta method of various orders. It is shown that an increase in the productivity of machine calculation can be achieved if it is possible to take into account the difference in the rate of change of different groups of coordinates of the investigated non-stationary system. The problem is formulated and the possibility of rational choice of parameters of the Runge-Kutta method formulas is considered, which allows minimizing the time of integration of equations of the mathematical model of the system.

Keywords*:* unsteady system, mathematical model, numerical method, Runge-Kutta method, method order, solution accuracy.