

**РОЗВ'ЯЗАННЯ АБСТРАКТНОЇ ЗАДАЧІ РІМАНА ЗА МЕТОДОМ
ФАКТОРИЗАЦІЇ**

О.Л. Комарницький, Л.М. Колмакова, М.О. Юрченко

Національний університет «Одеська політехніка»

1, Шевченка пр., м. Одеса, 65044, Україна

Emails: komarnitskii@op.edu.ua, kolmakova@op.edu.ua, yurchenko@op.edu.ua

Найбільш ефективними із загального арсеналу методів дослідження фізичних процесів розповсюдження звукових та електромагнітних сигналів в середовищах зі змінними характеристиками та формування мікротріщин у конструкційних матеріалах, які мають різноманітні неоднорідності спадкового походження, сьогодні є методи із застосуванням інтегралів Коші, крайових задач теорії аналітичних функцій, зокрема крайової задачі Рімана, а також метод сингулярних інтегральних рівнянь [1-3]. Теорія абстрактного сингулярного рівняння та абстрактної задачі Рімана виникла на основі теорії сингулярного інтегрального рівняння та крайової задачі Рімана на замкненому контурі. Розглянуті раніше схеми розв'язання абстрактної задачі Рімана узагальнюють не лише крайові задачі Рімана в просторі Гельдера та L_p , але й деякі інтегральні рівняння типу згортки (з двома ядрами,

Вінера-Хопфа, парними у просторі $L_2(\mathbb{R})$ та в більш широких просторах узагальнених функцій). У такій постановці відповідна задача Рімана більше не є крайовою задачею для аналітичних функцій. Однак, незважаючи на загальність, матрична крайова задача Рімана на замкненому контурі не підпорядковується розглянутим схемам. У цій роботі для розв'язання задачі Рімана запропоновано абстрактну схему з іншою аксіоматикою, яка усуває цей недолік. Визначена конструктивна схема рішення задачі в припущенні, що її оператор допускає факторизацію. Однак у абстрактній схемі, як і в теорії матричної крайової задачі Рімана, факторизацію оборотного елемента абстрактної алгебри, що розкладається в топологічну пряму суму двох своїх підпросторів, вдається здійснити лише в окремих конкретних випадках. На практиці кожний новий випадок побудови факторизації має наукову цінність як з теоретичної точки зору, так і з точки зору їх можливих застосувань.

Ключові слова: абстрактна задача Рімана, факторизація, частинні індекси, умови розв'язності, логарифм лінійного оператора.

Вступ. Теорія абстрактного сингулярного рівняння та абстрактної задачі Рімана виникла на ґрунті теорії сингулярного інтегрального рівняння та крайової задачі Рімана на замкненому контурі.

Розглянуті раніше схеми розв'язання абстрактної задачі Рімана узагальнюють не лише крайові задачі Рімана у просторі Гельдера та L_p , але й деякі інтегральні рівняння типу згортки (з двома ядрами, Вінера - Хопфа [4], парні [5]) у просторі $L_2(\mathbb{R})$ та в більш широких просторах узагальнених функцій. Відповідна до них задача Рімана вже не є крайовою задачею для аналітичних функцій.

Проте, незважаючи на усю загальність, розглянутим схемам не підкоряється матрична крайова задача Рімана на замкненому контурі. Введемо іншу аксіоматику, яка виправляє цей недолік.

Основна частина. Нехай L – банаховий простір, на якому визначений лінійний обмежений інволютивний оператор S . Цей оператор породжує два проектири

$$P_{\pm} = \frac{1}{2}(I \pm S), \quad I - \text{одиничний оператор.}$$

Простір L розкладається в пряму суму образів цих проекторів:

$$L = L_+ \oplus L_-.$$

Розглянемо задачу про знаходження елементів $\varphi^+ \in L_+$ та $\varphi^- \in L_-$, які задовольняють умові:

$$\varphi^+ = A \varphi^- + g, \quad (1)$$

де A – лінійний обмежений оператор, що має обернений оператор і визначається на L ,

g – заданий елемент простору L .

Розглянемо спочатку задачу (1) в частинних випадках, коли оператор A має спеціальний вигляд. Припустимо, що на просторі L задані лінійні обмежені оператори

$$U_1, U_2, \dots, U_n,$$

які задовольняють наступним умовам:

$$1) \quad U_j \cdot U_k = U_k \cdot U_j, \quad j, k = \overline{1, n};$$

$$2) \quad \text{для будь-яких } \varphi^{\pm} \in L_{\pm}$$

$$U_j \varphi^+ \in L_+, \quad U_j^{-1} \varphi^- \in L_-, \quad j = \overline{1, n}.$$

$$3) \quad \text{для оператора } U_j \text{ існує єдиний з точністю до сталого множника елемент } h_j^+ \in L_+ \text{ такий, що}$$

$$U_j^{-1} h_j^+ \in L_-, \quad j = \overline{1, n}.$$

$$4) \quad U_j h_k^+ = h_k^+, \text{ якщо } k = \overline{1, n} \text{ та } j \neq k.$$

Отримаємо розв'язок задачі (1) в кожному з чотирьох частинних випадків:

$$1. \quad A = U_j, \quad j = \overline{1, n}.$$

$$2. \quad A = U_j^{\varkappa}, \quad j = \overline{1, n}, \quad \varkappa \in \mathbb{N}, \quad \varkappa > 1.$$

$$3. \quad A = U_j^{-1}, \quad j = \overline{1, n}.$$

$$4. \quad A = U_j^{-\varkappa}, \quad j = \overline{1, n}, \quad \varkappa \in \mathbb{N}.$$

$$1. \quad A = U_j, \quad j = \overline{1, n}.$$

Тобто треба знайти елементи $\varphi^{\pm} \in L_{\pm}$ по умові:

$$\varphi^+ = U_j \varphi^- + g \quad (2)$$

Представимо елемент g у вигляді

$$g = g^+ - g^-, \text{ де } g^{\pm} = \pm P_{\pm} g.$$

Тоді задача (2) буде мати вигляд:

$$\varphi^+ - g^+ = U_j \varphi^- - g^-.$$

Застосуємо до обох частин рівності оператор U_j^{-1} :

$$U_j^{-1}(\varphi^+ - g^+) = \varphi^- - U_j^{-1}g^-,$$

оскільки $\varphi^- - U_j^{-1}g^- \in L_-$, то й $U_j^{-1}(\varphi^+ - g^+) \in L_-$,

тоді $\varphi^+ - g^+ = c \cdot h_j^+$, c - довільна стала.

Отримаємо розв'язок задачі (2):

$$\varphi^+ = g^+ + c \cdot h_j^+, \varphi^- = U_j^{-1}g^- + c \cdot U_j^{-1}h_j^+.$$

2. $A = U_j^\varkappa$, $j = \overline{1, n}$, $\varkappa \in \mathbb{N}$, $\varkappa > 1$.

$$\varphi^+ = U_j^\varkappa \varphi^- + g, \quad (3)$$

$$\varphi^+ - g^+ = U_j^\varkappa \varphi^- - g^-,$$

$$U_j^{-\varkappa}(\varphi^+ - g^+) = \varphi^- - U_j^{-\varkappa}g^-,$$

$$\varphi^- - U_j^{-\varkappa}g^- \in L_-,$$

$$U_j^{-\varkappa}(\varphi^+ - g^+) \in L_-.$$

В цьому випадку:

$$\varphi^+ - g^+ = \sum_{k=0}^{\varkappa-1} c_k U_j^k h_j^+,$$

$c_0, c_1, \dots, c_{\varkappa-1}$ - довільні сталі.

Отримаємо розв'язок задачі (3) у вигляді:

$$\varphi^+ = g^+ + \sum_{k=0}^{\varkappa-1} c_k U_j^k h_j^+,$$

$$\varphi^- = U_j^{-\varkappa}g^- + \sum_{k=0}^{\varkappa-1} c_k U_j^{-\varkappa+k} h_j^+.$$

3. $A = U_j^{-1}$, $j = \overline{1, n}$.

$$\varphi^+ = U_j^{-1} \varphi^- + g, \quad (4)$$

$$\varphi^+ - g^+ = U_j^{-1} \varphi^- - g^-,$$

елемент у лівій частині $\varphi^+ - g^+ \in L_+$, елемент у правій частині $U_j^{-1} \varphi^- - g^- \in L_-$.

Отже, $\varphi^+ - g^+ = 0$, $U_j^{-1} \varphi^- - g^- = 0$.

Єдиний розв'язок задачі (4) в цьому випадку має вигляд:

$$\varphi^+ = g^+, \varphi^- = U_j g^-.$$

Зауважимо, що $U_j g^-$ може не належати L_- , тоді задача (4) в загальному випадку не має розв'язку.

Виявимо, якою буде умова існування розв'язку задачі в цьому випадку.

Простір L_- розкладається в пряму суму двох підпросторів L_-^1 та $U_j^{-1} L_-$, L_-^1 – лінійна оболонка, натягнута на елемент $U_j^{-1} h_j^+$.

Таким чином, будь-який елемент $\psi^- \in L_-$ єдиним способом представляється у вигляді $\psi^- = c \cdot U_j^{-1} h_j^+ + U_j^{-1} \psi_1^-$, c – довільна стала, $\psi_1^- \in L_-$.

Розглянемо лінійний функціонал F_j^1 , заданий на просторі L_- , який діє за правилом:

$$F_j^1 \psi^- = c.$$

Очевидно, що задача (4) буде мати розв'язок, лише коли виконана умова:

$$F_j^1 g^- = 0.$$

Зауважимо, що простір L_- можна також розкласти в пряму суму підпросторів $L_-^{\varkappa} \oplus U_j^{\varkappa} L_-$, де $L_-^{\varkappa}$ – лінійна оболонка, натягнута на елементи $U_j^{-1} h_j^+, U_j^{-2} h_j^+, \dots, U_j^{-\varkappa} h_j^+$. Тобто довільний елемент $\psi^- \in L_-$ єдиним чином записується у вигляді

$$\psi^- = c_1 \cdot U_j^{-1} h_j^+ + c_2 \cdot U_j^{-2} h_j^+ \dots + c_{\varkappa} \cdot U_j^{-\varkappa} h_j^+ + U_j^{-\varkappa} \psi_1^-, \quad \psi_1^- \in L_-,$$

$c_1, \dots, c_{\varkappa}$ – довільні сталі.

Розглянемо лінійні функціонали $F_j^1, F_j^2, \dots, F_j^{\varkappa}$, що задані на просторі L_- , які діють за правилом:

$$F_j^1 \psi^- = c_1, F_j^2 \psi^- = c_2, \dots, F_j^{\varkappa} \psi^- = c_{\varkappa}.$$

Далі розглянемо наступний випадок.

$$4. \quad A = U_j^{-\varkappa}.$$

$$\varphi^+ = U_j^{-\varkappa} \varphi^- + g \quad (5)$$

$$\varphi^+ - g^+ = U_j^{-\varkappa} \varphi^- - g^-, \quad \varphi^+ - g^+ \in L_+, \quad U_j^{-\varkappa} \varphi^- - g^- \in L_-.$$

Розв'язок задачі (5) має вигляд:

$$\varphi^+ = g^+, \quad \varphi^- = U_j^{\varkappa} g^-.$$

Для того, щоб $\varphi^- \in L_-$, необхідно та достатньо виконання $\varkappa$ - умов існування розв'язку:

$$F_j^k g^- = 0, \quad k = \overline{1, \varkappa}.$$

Узагальнимо розглянуті вище випадки:

$$A = U = U_1^{\varkappa_1} U_2^{\varkappa_2} \dots U_n^{\varkappa_n}.$$

$$\varphi^+ = U \varphi^- + g, \quad (6)$$

Припустимо: $\varkappa_j > 0, j = \overline{1, m}, \varkappa_j < 0, j = \overline{m+1, l}, \varkappa_j = 0, j = \overline{l+1, n}$.

Для існування розв'язку задачі (6) необхідно та достатньо виконання $-\sum_{j=m+1}^l \varkappa_j$ умов:

$$F_j^k g^- = 0, \quad j = \overline{m+1, l}, \quad k = \overline{1, -\varkappa_j}.$$

І якщо ці умови виконані, то загальний розв'язок задачі (6) залежить від $\sum_{j=1}^m \varkappa_j$

довільних сталих c_{jk} $k = \overline{0, \varkappa_j - 1}$, $j = \overline{1, m}$, та має вигляд:

$$\begin{aligned} \varphi^+ &= g^+ + \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{\varkappa_j-1} c_{jk} U_j^k h_j^+, \\ \varphi^- &= U^{-1} g^- + \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{\varkappa_j-1} c_{jk} U_j^{-\varkappa_j+k} h_j^+. \end{aligned}$$

Припустимо, що довільний оператор A , що має обернений оператор, допускає факторизацію, тобто представляється у вигляді:

$$A = X^+ U (X^-)^{-1}, \quad (7)$$

де X^+, X^- – лінійні оператори, що мають обернені оператори та задані на L і відображають відповідно підпростори $L_{\pm}$ в себе.

Тоді задача (1) приймає вигляд:

$$\begin{aligned} \varphi^+ &= X^+ U (X^-)^{-1} \cdot \varphi^- + g, \\ (X^+)^{-1} \varphi^+ &= U (X^-)^{-1} \cdot \varphi^- + (X^+)^{-1} \cdot g. \end{aligned}$$

Заміна:

$$\psi^+ = (X^+)^{-1} \cdot \varphi^+, \quad \psi^- = (X^-)^{-1} \cdot \varphi^-, \quad (X^+)^{-1} \cdot g = q.$$

Отримаємо:

$$\psi^+ = U \cdot \psi^- + q \quad (8)$$

Таку задачу розглянуто вище.

Для існування її розв'язку необхідно та достатньо виконання $-\sum_{j=m+1}^l \varkappa_j$ умов:

$$F_j^k q^- = 0, \quad j = \overline{m+1, l}, \quad k = \overline{1, -\varkappa_j}, \quad q^{\pm} = \pm P_{\pm} q.$$

Загальний розв'язок задачі (8) залежить від $\sum_{j=1}^m \varkappa_j$ довільних сталих та має вигляд:

$$\begin{aligned} \psi^+ &= q^+ + \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{\varkappa_j-1} c_{jk} U_j^k h_j^+, \\ \psi^- &= U^{-1} q^- + \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{\varkappa_j-1} c_{jk} U_j^{-\varkappa_j+k} h_j^+. \end{aligned}$$

Тоді:

$$\begin{aligned} \varphi^+ &= X^+ \left(q^+ + \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{\varkappa_j-1} c_{jk} U_j^k h_j^+ \right), \\ \varphi^- &= X^- \left(U^{-1} q^- + \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{\varkappa_j-1} c_{jk} U_j^{-\varkappa_j+k} h_j^+ \right) \end{aligned}$$

– розв’язок задачі (1).

Ми припустили, що оператор A допускає факторизацію, і здійснили конструктивне розв’язання задачі, але не встановили способи представлення оператора у вигляді (7).

Далі розглянемо одну з ситуацій, коли факторизацію можна здійснити.

Нехай T є комутативною підалгеброю з одиницею алгебри лінійних обмежених операторів, заданих на L .

Нехай оператори $A, U_j \in T, j \in \overline{1, n}$. На алгебрі задана експоненціальна функція

$$\exp V = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{V^n}{n!}.$$

Елементи алгебри T , що мають такий вигляд, називаються логарифмованими. Позначимо множину логарифмованих елементів алгебри $\exp(T)$. Ця множина є групою відносно множення. Якщо оператор $W = \exp V \in \exp(T)$, то оператор V називається логарифмом оператора W : $V = \ln W$.

Припустимо, що існує такий набір частинних індексів $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \dots, \mathcal{K}_n$, що оператор $U^{-1} \cdot A \in \exp(T)$, тоді оператор A допускає факторизацію.

В алгебрі T розглянемо задачу по стрибку:

$$\Psi^+ - \Psi^- = \ln U^{-1} \cdot A.$$

Позначимо $X^\pm = \exp \Psi^\pm$. Елементи $X^\pm$ мають обернені відповідно в алгебрах $T_\pm$ операторів, що переводять відповідно простори $L_\pm$ в себе, причому має місце факторизація (7).

Висновки. У статті запропонована абстрактна схема розв’язання задачі Рімана, аксіоматика якої на відміну від запропонованих раніше абстрактних схем, узагальнює матричну крайову задачу Рімана на замкненому контурі l [6]:

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \quad t \in l.$$

Тут $G(t)$ – матриця гельдеровських функцій, яка має обернену матрицю, $g(t) \in H_\lambda$, – стовпець гельдеровських функцій, $\Phi^+(t)$ складається з функцій, що аналітично продовжуються в середину контуру, $\Phi^-(t)$ – поза контуру, S – оператор сингулярного інтегрування, точка 0 належить області, що обмежена контуром l .

Оператором U_j в цьому випадку є діагональна квадратна матриця, у якій j -ий елемент діагоналі дорівнює t , а усі інші діагональні елементи дорівнюють 1. Елементом h_j^+ є стовпець, в якому в j -му рядку міститься стала функція, тотожно рівна 1.

Очевидно, що оператор U представляє діагональну матрицю з функціями $t^{\mathcal{K}_1}, t^{\mathcal{K}_2}, \dots, t^{\mathcal{K}_n}$ на діагоналі.

Список літератури

1. Oborskij G. A., Dashhenko A.F., Usov A. V., Dmitrishin A. V. Modelirovanie sistem : Monografija, Odesa: Astroprint. 2013. 664 p
2. Usov A.V., Kunitcyn M.V. Simulation of thermomechanical processes in functionally-gradient materials of inhomogeneous structure in the manufacturing and operation of rocket structural elements. Kosm.tex. Raket. vooruz. Space Technology. Missile Armaments. 2020(1). С. 137-148. <https://doi.org/10.33136/stma2020.01.137>.

3. Kryvyi O.F., Morozov Yu.O. Influence of concentrated forces on an interface inclusion under the conditions of smooth contact in the inhomogeneous transversely isotropic space, J.Math.Sci., Vol. 279, No 2. 2024. С. 197–212. <https://doi.org/10.1007/s10958-024-07005-3>.
4. Комарницький О.Л., Колмакова Л.М. Метод факторизації при розв'язанні двохіндексної системи Винера–Хопфа. Міжнародна літня математична школа пам'яті В.А. Плотникова. 15-22 червня 2013 р. Одеса. Україна. Тези доповідей. С. 68.
5. Комарницький О.Л., Колмакова Л.М. Метод факторизації при розв'язанні парної двохіндексної системи типу згортки. Міжнародна літня математична школа пам'яті В.А. Плотникова. 11-16 червня 2018 р. Одеса. Україна. Тези доповідей. С.59.
6. Комарницький О.Л., Колмакова Л.М. Абстрактна задача Рімана, яка узагальнює матричну крайову задачу. Матеріали XVII Міжнародної наукової конференції імені академіка Михайла Кравчука, Том 1, Київ, 19-20 травня 2016 р. С. 150–151.

THE ABSTRACT RIEMANN PROBLEM AND THE FACTORIZATION METHOD

O.L. Komarnitskii, L.M. Kolmakova, M.O. Yurchenko

National Odesa Polytechnic University

1, Shevchenko Ave., Odesa, 65044, Ukraine

Emails: komarnitskii@op.edu.ua, kolmakova@op.edu.ua, yurchenko@op.edu.ua

The most effective among the general arsenal of methods for studying the physical processes of propagation of acoustic and electromagnetic signals in media with variable characteristics, as well as the formation of microcracks in structural materials that have various types of hereditary inhomogeneities, at present are methods involving Cauchy integrals, boundary value problems of the theory of analytic functions, in particular the Riemann boundary value problem, as well as the method of singular integral equations. The theory of abstract singular equation and of the abstract Riemann problem arose on the basis of the theory of a singular integral equation and the Riemann boundary value problem on a closed contour. The previously considered schemes for solving the abstract Riemann problem generalize not only the Riemann boundary value problems in Holder space and L_p , but and some integral convolution type equations (with two kernels, Wiener–Hopf, pair ones) in the space $L_2(\mathbb{R})$ and in wider spaces generalized functions. The corresponding Riemann problem is no longer a boundary problem for analytic functions. However, despite on the whole generality, the matrix Riemann boundary-value problem on a closed contour does not obey to the considered schemes. In this paper, for solving the Riemann problem, an abstract scheme with another axiomatic is proposed, which eliminates this disadvantage. A constructive scheme for solving the problem has been defined under the assumption that its operator permits factorization. However, in the abstract scheme, as in the theory of the matrix Riemann boundary value problem, the factorization of an invertible element of an abstract algebra, decomposing into a typological direct sum of its two subspaces, it is possible to build it only in special cases. In practice, each new case of constructing a factorization is of scientific value both from a theoretical perspective and in terms of its potential applications

Keywords: the Riemann abstract problem, factorization, partial indices, solvability conditions, logarithm of linear operator.