

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Одеський національний політехнічний університет

ІНФОРМАТИКА ТА МАТЕМАТИЧНІ
МЕТОДИ В МОДЕЛЮВАННІ

INFORMATICS AND MATHEMATICAL
METHODS IN SIMULATION

Том 5, № 2

Volume 5, No. 2

Одеса – 2015
Odesa – 2015

Журнал внесений до переліку наукових фахових видань України
(технічні науки)
згідно наказу Міністерства освіти і науки України № 463 від 25.04.2013 р.

Виходить 4 рази на рік

Заснований Одеським національним
політехнічним університетом у 2011 році

Свідоцтво про державну реєстрацію
КВ № 17610 - 6460Р від 04.04.2011р.

Головний редактор: *Г.О. Оборський*

Заступник головного редактора:

А.А. Кобозєва

Відповідальний редактор:

А.Л. Іванова

Редакційна колегія:

*Т.О. Банах, П.І. Бідюк, Н.Д. Вайсфельд,
А.Ф. Верлань, Г.М. Востров, В.Б. Дудикевич,
Л.Є. Євтушик, М.Б. Копитчук, С.В. Ленков,
І.І. Маракова, А.Д. Мілка, С.А. Нестеренко,
М.С. Никитченко, С.А. Положаєнко,
О.В. Рибальський, Х.М.М. Рубіо, В.Д. Русов,
І.М. Ткаченко-Горський, А.В. Усов,
В.О. Хорошко, М.Є. Шелест, М.С. Яджак*

Published 4 times a year

Founded by Odessa National Polytechnic
University in 2011

Certificate of State Registration

КВ № 17610 - 6460P of 04.04.2011

Editor-in-chief: *G.A. Oborsky*

Associate editor:

A.A. Kobozeva

Executive editor:

A.L. Ivanova

Editorial Board:

*T. Banakh, P. Bidiuk, V. Dudykevich,
L. Evtushik, V. Khoroshko, N. Kopytchuk,
S. Lenkov, I. Marakova, A. Milka, S. Nesterenko,
N. Nikitchenko, S. Polozhaenko, J. Rubio,
V. Rusov, O. Rybalsky, M. Shelest,
I. Tkachenko Gorski, A. Usov, N. Vaysfeld,
A. Verlan, G. Vostrov, M. Yadzhak*

Друкується за рішенням редакційної колегії та Вченої ради Одеського національного
політехнічного університету

Оригінал-макет виготовлено редакцією журналу

Адреса редакції: просп. Шевченка, 1, Одеса, 65044, Україна

Телефон: +38 048 705 8506

Web: <http://immm.opu.ua>

E-mail: immm.ukraine@gmail.com

Editorial address: 1 Shevchenko Ave., Odessa, 65044, Ukraine

Tel.: +38 048 705 8506

Web: <http://immm.opu.ua>

E-mail: immm.ukraine@gmail.com

© Одеський національний політехнічний університет, 2015

ЗМІСТ / CONTENTS

- ПРОГРАМНІ ЗАСОБИ
КОМП'ЮТЕРНОГО МОДЕЛЮВАННЯ
ПРОЦЕСІВ ВИЯВЛЕННЯ І
РОЗРІЗНЕННЯ СИГНАЛІВ НА ФОНІ
НЕГАУСОВИХ ЗАВАД
В.В. Палагін
- 103 SOFTWARE TOOLS OF COMPUTER
SIMULATION SIGNALS DETECTION
AND DISTINCTION ON
BACKGROUND NON-GAUSSIAN
NOISE
Palahin V.
- ЛОКАЛІЗАЦІЯ РАЙДУЖНОЇ
ОБОЛОНКИ ОКА ДЛЯ МОБІЛЬНОЇ
СИСТЕМИ БІОМЕТРИЧНОЇ
ІДЕНТИФІКАЦІЇ ЛЮДИНИ
К.О. Трифонова, Е.І. Гришикашвілі,
О.В. Наріманова. А.Р. Агаджанян
- 115 IRIS LOCALIZATION IN BIOMETRIC
PERSONAL IDENTIFICATION
SYSTEMS DEVELOPED FOR MOBILE
DEVICES
Tryfonova K., Grishikashvili E.,
Narimanova O., Agadzhanian A.
- ПІДТРИМКА ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ
ПРИ ФОРМУВАННІ ПРОГРАМ
ІНФОРМАЦІЙНОЇ БЕЗПЕКИ
ДЕРЖАВИ: ОЦІНКА ЕФЕКТИВНОСТІ
ПРОГРАМ.
С.В. Зибін, В.О. Хорошко
- 122 SUPPORT ADOPTION DECISIONS IN
THE FORMATIVE PROGRAMS
INFORMATION SECURITY STATE:
EVALUATION OF THE
EFFECTIVENESS OF PROGRAMS
Zybin S., Khoroshko V.
- ВИЯВЛЕННЯ ПОРУШЕНЬ
ЦІЛІСНОСТІ ЦИФРОВОГО
ЗОБРАЖЕННЯ ШЛЯХОМ
ВИКОРИСТАННЯ
СТЕГАНОГРАФІЧНИХ АЛГОРИТМІВ
А.А.Кобозєва, І.І. Бобок,
Л.М. Дзюбинська
- 129 IDENTIFYING THE UNAUTHORIZED
CHANGES OF IMAGES AREAS THAT
EXPOSED TO STEGANOGRAPHY
ALGORITHM
Kobozeva A., Bobok I., Dzubinskaya L.
- ІДЕНТИФІКАЦІЯ ДОБОВОЇ
ДИНАМІКИ ГЛЮКОЗИ В КРОВІ
Ю.М. Чайківська, Р.М. Пасічник
- 135 IDENTIFICATION DAILY DYNAMICS
OF BLOOD GLUCOSE
Chaikovsky Y., Pasichnyk R.
- ПОБУДОВА АПРОКСИМАЦІЙНОЇ
МОДЕЛІ ВОЛЬТЕРРА НЕЛІНІЙНОЇ
СИСТЕМИ ЗА ДОПОМОГОЮ
ПОЛІІМПУЛЬСНИХ ТЕСТОВИХ
СИГНАЛІВ
М. М. Масрі, С. В. Павленко,
В. Д. Павленко
- 142 CONSTRUCTION OF
APPROXIMATION MODEL
ВОЛЬТЕРРА NONLINEAR SYSTEM
BY MEANS POLY IMPULSES OF TEST
SIGNALS
Masri M., Pavlenko S., Pavlenko V.
- МОДЕЛЮВАННЯ ВТОМНИХ
ТРИЩИН В ТРУБЧАСТИХ ОСЯХ ПРИ
ВИГІНІ З ОБЕРТАННЯМ
Й. Аріза Де Мігель
- 152 MODELLING OF FATIGUE CRACKS IN
HOLLOW AXLES UNDER ROTATING
BENDING
Ariza De Miguel J.

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ
ПЛИНУ ГАЗОВАНОЇ РІДИНИ У
ДОКРИТИЧНІЙ ОБЛАСТІ
ГЕТЕРОГЕННИХ СИСТЕМ
В.С. Савіч

ПОШУК ОПТИМАЛЬНОГО РІШЕННЯ
ЗВОРОТНОЇ ЗАДАЧІ
ЕКОНОМІЧНОГО МЕНЕДЖМЕНТУ
ІНФОРМАЦІЙНОЇ БЕЗПЕКИ
Є.Г. Левченко, Д.І. Рабчун

АНАЛІЗ УМОВ РОЗВ'ЯЗУВАНOSTI
ЗАДАЧІ СИНТЕЗУ ОБМЕЖЕНОГО
СТАБІЛІЗУЮЧОГО КЕРУВАННЯ
ЗАПАСАМИ ЗА ДОПОМОГОЮ
БІЛІНІЙНИХ МАТРИЧНИХ
НЕРІВНОСТЕЙ
Ю.І. Дорофєєв

ЕФЕКТИВНИЙ СПОСІБ МІНІМІЗАЦІЇ
БУЛЕВИХ ФУНКЦІЙ НА ОСНОВІ
ІНФІМУМНИХ ДИЗ'ЮНКТИВНИХ
НОРМАЛЬНИХ ФОРМ
Ю.Д. Іванов

160 MATHEMATICAL DESIGN OF FLOW
OF THE CARBONATED LIQUID IS IN
VORCRITICAL OF AREA OF
HETEROGENEOUS SYSTEMS
Savich V.

167 SEARCH OF THE OPTIMAL
SOLUTION OF THE INVERSE
PROBLEM OF ECONOMIC
MANAGEMENT OF INFORMATION
SECURITY
Levchenko E., Rabchun D.

177 ANALYSIS OF THE SOLVABILITY
CONDITIONS OF THE CONSTRAINED
STABILIZING INVENTORY CONTROL
SYNTHESIS PROBLEM USING
BILINEAR MATRIX INEQUALITIES
Dorofieiev Yu.

191 EFFICIENT WAYMINIMIZATION OF
BOOLEAN FUNCTIONS BASED ON
INFIMUMNYH DISJUNCTIVE
NORMAL FORM
Ivanov Yu.

ПРОГРАММНЫЕ СРЕДСТВА КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ ОБНАРУЖЕНИЯ И РАЗЛИЧЕНИЯ СИГНАЛОВ НА ФОНЕ НЕГАУССОВСКИХ ПОМЕХ

В.В. Палагин

Черкасский государственный технологический университет,
бул. Шевченко, 460, Черкассы, 18005, Украина; e-mail: palahin@yahoo.com

Рассмотрены вопросы моделирования процессов обнаружения и различения сигналов на фоне негауссовских помех на основе моментно-кумулянтного представления случайных величин с формированием моментных критериев качества проверки статистических гипотез и полиномиальных решающих правил для обеспечения построения эффективных методов и компьютерных средств функционирования систем приема и обработки данных. Показано, что нелинейная обработка выборочных значений, учет параметров негауссовского распределения в виде кумулянтных коэффициентов третьего и выше порядков позволяет увеличить эффективность обработки данных в виде уменьшения вероятностей ошибок первого и второго рода по сравнению с известными результатами.

Ключевые слова: моментные критерии качества, проверка статистических гипотез, негауссовские помехи.

Введение

Функционирование современных систем наблюдения, диагностики, мониторинга, контроля, управления, развитие которых характеризуется повышенными требованиями к качеству обработки информации, росту уровня сложности и расширению функциональных возможностей, непосредственно связано с качеством построения систем обнаружения и различения сигналов. Проблемы, возникающие при совершенствовании систем данного класса, связаны не только с технологическим обновлением, но и в значительной степени с созданием совершенных методов обработки сигналов, представляющих собой случайные процессы.

Традиционно построение систем обнаружения и различения сигналов базируется на классических методах теории проверки статистических гипотез, которые в общем случае не предусматривают ограничений на использование вида плотности распределения случайных величин [1]. На практике широкое распространение получило применение стандартного нормального распределения случайных величин, которое во многих случаях исключает отражение реальных процессов с необходимой адекватностью. Действия различных дестабилизирующих факторов на сигналы порождают сложную сигнально-помеховую ситуацию, которая описывается негауссовскими случайными процессами [2]. Эти обстоятельства существенно усложняют применение традиционных гауссовских моделей при разработке алгоритмов обработки информации в системах обнаружения и различения сигналов с обеспечением требуемой точности.

Использование традиционного подхода к исследованию и разработке систем обработки случайных негауссовских процессов характеризуется существенными ограничениями, связанными со сложностью их алгоритмической реализации, ростом вычислительных ресурсов. Поэтому возникает необходимость в построении, моделировании и исследовании методов и алгоритмов обработки сигналов, которые были бы оптимальными для негауссовских моделей помех [3].

Исследования последних лет свидетельствуют о том, что для решения задач обработки негауссовских процессов перспективным является другой подход, который для описания статистических свойств случайных величин использует моменты и кумулянты (семиварианты) и позволяет с приемлемым приближением характеризовать статистические свойства негауссовских процессов [4, 5]. В частности, кумулянты и кумулянтные коэффициенты, в отличие от моментов, имеют самостоятельный статистический смысл и позволяют описывать степень негауссовости случайных величин. Такой подход позволяет повысить точность обработки негауссовских сигналов по сравнению с традиционным корреляционным подходом при заданных ограничениях на их сложность, уменьшить сложность алгоритмов обнаружения и различения сигналов, реализовать обработку сигналов при аддитивно-мультипликативном взаимодействии с негауссовскими помехами, учесть корреляционные связи негауссовских случайных величин.

Выбранный подход к решению этой проблемы основывается на расширении класса математических моделей, учете особенностей обработки негауссовских процессов, разработке моментных критериев качества проверки статистических гипотез, создания полиномиальных алгоритмов реализации моделей.

Цель работы состоит в создании и реализации моделей процессов обнаружения и различения сигналов на фоне негауссовских помех на основе моментно-кумулянтного представления случайных величин с формированием моментных критериев качества проверки статистических гипотез и полиномиальных решающих правил для обеспечения построения эффективных методов и компьютерных средств функционирования систем приема и обработки данных соответствующего класса.

Основная часть

Сформулируем задачу различения сигналов на фоне помех следующим образом. Пусть на интервале времени $(0, T)$ наблюдаются случайные сигналы $\xi_i(t)$, $i = 1, N$, по которым принимаются решения о реализации соответствующей гипотезы H_i , т.е. решения о приеме соответствующего полезного сигнала $s_i(t)$, который подлежит различению, либо решение о реализации гипотезы H_0 , которая соответствует отсутствию полезного сигнала. Принимаемые сигналы $\xi_i(t)$ представляют собой аддитивную смесь $\xi_i(t) = s_i(t) + \eta_i$, где $\eta_i(t)$ – негауссовская случайная величина, описываемая последовательностью моментов и кумулянтов.

Каждому принимаемому сигналу соответствует свое моментно-кумулянтное описание, представленное в виде конечной последовательности моментов $m_i[\{\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{i\mu}\}, \{0, \gamma_{i2}, \gamma_{i3}, \gamma_{i4}, \dots, \gamma_{i\mu}\}]$, где $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{i\mu}$ – начальные моменты, описывающие признаки сигнала $s_i(t)$, $\gamma_{i2}, \gamma_{i3}, \gamma_{i4}, \dots, \gamma_{i\mu}$ – кумулянтные коэффициенты, описывающие признаки негауссовской помехи $\eta_i(t)$.

Рассмотрим в общем случае $N+1$ гипотез, которые будут внесены в отношении наблюдаемых сигналов. Тогда, заменив непрерывное время наблюдения t на

отсчеты v , произведенные из наблюдаемых сигналов $\xi_i(t)$, получим их дискретные значения $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ для соответствующих гипотез:

$$H_i: \xi_{iv} = s_{iv}(\alpha_k) + \eta_i(\gamma_k),$$

$$H_0: \xi_{0v} = \eta_i(\gamma_k), \quad i = \overline{1, N}, \quad k = \overline{1, \mu},$$

где $s_{iv}(\alpha_k)$ – i -й сигнал с известными параметрами α_k ;

$\eta_i(\gamma_k)$ – негауссовская случайная величина с известными параметрами в виде кумулянтов γ_k .

Отметим, что соответствующему принимаемому сигналу соответствует свое моментно-кумулянтное описание $m_i(\alpha_i, \gamma_i)$ заданного порядка.

Задачам различения сигналов на фоне помех уделено достаточно много внимания, о чем свидетельствует как хорошо разработанная теория, так и большое количество публикаций. Согласно классическому вероятностному подходу [1], оптимальный байесовский алгоритм различения сигналов находится из условия минимума среднего риска

$$R = \sum_{j=0}^N \sum_{i=0}^N \Pi_{ij} p_j P(\gamma_i | H_j),$$

где Π_{ij} — элементы матрицы потерь;

$p_j = P(H_j)$ – вероятности появления гипотез H_j ;

$P(\gamma_i | H_j)$ – вероятности ошибок вынесения решений о событии γ_i при реализации гипотезы H_j .

Тогда оптимальный алгоритм различения сигналов представляется в виде:

$$p_i P(X/H_i) = \max_{j=0, N} \{p_j P(X/H_j)\}, \quad i = \overline{0, N}, \quad (1)$$

или

$$\ln P(X/H_i) + \ln p_i = \max_{j=0, N} \{\ln P_j(X/H_j) + \ln p_j\}, \quad i = \overline{0, N}.$$

Минимальной достаточной статистикой для поставленной задачи является N скалярных функций векторной выборки X отношения правдоподобия $A(X)_i = P(X/H_i)/P(X/H_0)$.

Используя критерий максимума апостериорной вероятности, решение о передаче сигнала $s_i(t)$ (реализация гипотезы H_i) принимается тогда, когда выполняется условие:

$$\ln A(X)_i + \ln p_i = \max_{j=0, N} \{\ln A(X)_j + \ln p_j\}, \quad A(X)_j p_j / p_0 \geq 1,$$

а решение о том, что сигналы отсутствуют (реализация гипотезы H_0), – в случае, если:

$$A(X)_j p_j / p_0 < 1, \quad j = \overline{1, N}.$$

Решение подобных задач в основном рассматривается в предположении нормального закона распределения $P(X/H_i)$ случайных величин. В других случаях бывает затруднительно найти плотности распределения и, соответственно, получить решения вида (1). Тогда можно воспользоваться приемом [6-8], представляющим собой разложение отношения правдоподобия проверки статистических гипотез H_m и H_r в стохастический полином конечной степени s , который при простых матрицах потерь и равновероятном появлении гипотез принимает вид

$$L(X)_{sn}^{(mr)} = \sum_{i=1}^s k_i^{(mr)} \sum_{v=1}^n x_v^i + k_0^{(mr)} \begin{matrix} > & H_m \\ < & H_r \end{matrix} 0, \quad r, m = \overline{0, N-1}, \quad r \neq m, \quad (2)$$

где неизвестные оптимальные коэффициенты $k_i^{(mr)}$ и $k_0^{(mr)}$ находятся по заданному критерию качества. Следует заметить, что при использовании стохастического полинома (2) для многоальтернативной проверки статистических гипотез его неизвестные коэффициенты необходимо находить таким образом, чтобы они, с одной стороны, минимизировали вероятности ошибок решающего правила (РП) (2), а с другой – учитывали взаимосвязи между проверяемыми гипотезами H_m и H_r .

Рассмотрим общий случай обработки статистически независимых одинаково распределенных выборочных значений X , для которых коэффициент $k_i^{(mr)}$ не зависит от номера выборочных значений v .

Для оценки качества полиномиальных РП (2) используем матрицу вероятностей ошибок различения сигналов $p_{ij} = P(\gamma_i | H_j)$, $i, j = \overline{0, N}$, характеризующую как вероятности ошибок определения максимального значения (1), так и вероятность перепутывания гипотез:

$H_j \setminus \gamma_i$	0	1	2	...	N
H_0	p_{00}	p_{10}	p_{20}	...	p_{N0}
H_1	p_{01}	p_{11}	p_{21}	...	p_{N1}
H_2	p_{02}	p_{12}	p_{22}	...	p_{N2}
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	...	\vdots
H_N	p_{0N}	p_{1N}	p_{2N}	...	p_{NN}

Отсюда видно, что вероятность ошибок реализации соответствующих гипотез определяется:

$$P(H_0) = \sum_{i=1}^N p_{0i}, \quad P(H_1) = \sum_{i=0, i \neq 1}^N p_{1i}, \quad \dots, \quad P(H_N) = \sum_{i=0, i \neq N}^N p_{Ni}.$$

Значения p_{ii} , $i = \overline{0, N}$ на главной диагонали характеризуют вероятности правильного различения сигналов. Легко показать, что p_{ij} , лежащие над главной диагональю, представляют собой вероятности ошибок первого рода $\alpha^{(mr)}$ всех возможных РП (2), а лежащие под главной диагональю – вероятности ошибок второго рода $\beta^{(mr)}$. Тогда, в соответствии с байесовским подходом, при использовании простых матриц потерь и равновероятном появлении гипотез, т.е. при $p_0 = p_1 = \dots = p_N = 1/(N+1)$, оптимальные коэффициенты РП (2) должны минимизировать среднее значение риска:

$$R = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N p_{ij}, i \neq j.$$

В предположении большого количества одинаково распределенных выборочных значений $n \rightarrow \infty$, согласно предельной центральной теореме, вероятности ошибок РП вида (2) будут стремиться к нормальному закону распределения. Показано, что в этом случае сумма асимптотических вероятностей ошибок первого и второго рода для одной решающей функций $A^{(mr)}(X)$ проверки гипотезы H_m и H_r будет иметь вид:

$$Yu(E, G)^{(mr)} = \frac{\left[(G_m^{(mr)})^{0.5} + (G_r^{(mr)})^{0.5} \right]^2}{\left[E_m^{(mr)} - E_r^{(mr)} \right]^2}, r, m = \overline{0, N}, r \neq m, \quad (3)$$

где математические ожидания и дисперсии РП при гипотезах H_m и H_r соответственно имеют вид:

$$E_m^{(mr)} = n \sum_{i=1}^s k_i^{(mr)} m_i^{(m)}, E_r^{(mr)} = n \sum_{i=1}^s k_i^{(mr)} m_i^{(r)},$$

$$G_m^{(mr)} = n \sum_{i=s}^s \sum_{j=1}^s k_i^{(mr)} k_j^{(mr)} F_{(i,j)}^{(m)}, G_r^{(mr)} = n \sum_{i=s}^s \sum_{j=1}^s k_i^{(mr)} k_j^{(mr)} F_{(i,j)}^{(r)},$$

где $F_{(i,j)}^{(m)} = m_{(i+j)}^{(m)} + m_i^{(m)} m_j^{(m)}$, $F_{(i,j)}^{(r)} = m_{(i+j)}^{(r)} + m_i^{(r)} m_j^{(r)}$ - центральные коррелянты случайной величины (i, j) -го порядка при гипотезах H_m и H_r соответственно, $m_i^{(m)}$, $m_i^{(r)}$ - начальные моменты i -го порядка случайной величины ξ при гипотезах H_m и H_r соответственно.

Показано, что оптимальный коэффициент $k_0^{(mr)}$ находится из условий минимума суммы вероятностей ошибок первого и второго рода и имеет вид:

$$k_0^{(mr)} = - \frac{E_m^{(mr)} (G_r^{(mr)})^{0.5} + E_r^{(mr)} (G_m^{(mr)})^{0.5}}{(G_m^{(mr)})^{0.5} + (G_r^{(mr)})^{0.5}}. \quad (4)$$

Неизвестные коэффициенты $k_i^{(mr)}$ РП (2), минимизирующие функционал (3), находятся из решения системы линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{j=1}^s k_j^{(mr)} \left[\left(1 + c^{(mr)} \right) F_{(i,j)}^{(m)} + \left(1 + \frac{1}{c^{(mr)}} \right) F_{(i,j)}^{(r)} \right] = m_i^{(m)} - m_i^{(r)}, i = \overline{1, s}, \quad (5)$$

где $c^{(mr)} = \left[\frac{G_m^{(mr)}}{G_r^{(mr)}} \right]^{0.5}$.

Определение 1. Примем функционал $Yu(E, G)^{(mr)}$ (3) за критерий качества выбора РП вида (2) и будем считать наилучшим то правило, которое при $k_0^{(mr)}$ вида (4) и $k_i^{(mr)}$, найденных из (5), минимизирует правую часть (3). Данный критерий будем называть адаптированным асимптотически нормальным моментным критерием качества для проверки многоальтернативных статистических гипотез.

При таком полиномиальном подходе к оптимальному выбору РП различения сигналов на фоне помех, математическая структура выбора гипотезы H_m будет имеет вид:

$$H_m : \max_{m=1, N} \left\{ \sum_{i=1}^s \sum_{v=1}^n k_i^{m0} x_v^i + k_0^{m0} \right\} > 0; \quad H_0 : \max_{m=1, N} \left\{ \sum_{i=1}^s \sum_{v=1}^n k_i^{m0} x_v^i + k_0^{m0} \right\} < 0. \quad (6)$$

$$\sum_{i=1}^s \sum_{v=1}^n k_i^{m0} x_v^i + k_0^{m0} > \sum_{i=1}^s \sum_{v=1}^n k_i^{r0} x_v^i + k_0^{r0}, \quad m, r = \overline{1, N}, \quad r \neq m.$$

При рассмотрении общего случая проверки $N+1$ гипотез для качественной оценки полученных РП различения сигналов на фоне помех введем величину, которая характеризует общие асимптотические вероятностей ошибок различения гипотезы H_m :

$$Yu(E, G)^{(m)} = \sum_{r=0}^N \frac{[G_m^{(mr)}]^2 + [G_r^{(mr)}]^2}{[E_m^{(mr)} - E_r^{(mr)}]^2}, \quad m = \overline{1, N}, \quad m \neq r.$$

Если объем выборки не достаточно большой и нет возможности использовать данный моментный критерий качества, в этом случае можно воспользоваться другим критерием качества, который характеризует верхние границы вероятностей ошибок первого и второго рода. В этом случае полиномиальное РП будет иметь вид, аналогичный (2), где порог $k_0^{(mr)}$ выбирается как среднее значение математических ожиданий РП $E_m^{(mr)}$ и $E_r^{(mr)}$ при реализации гипотезы H_m и H_r соответственно и имеет вид:

$$k_0^{(mr)} = -\frac{1}{2} (E_m^{(mr)} + E_r^{(mr)}), \quad m, r = \overline{0, N-1}, \quad m \neq r, \quad (7)$$

а оптимальные коэффициенты РП (2) $k_i^{(mr)}$ находятся из минимума функционала:

$$Ku(E, G)^{(mr)} = \frac{G_m^{(mr)} + G_r^{(mr)}}{[E_m^{(mr)} - E_r^{(mr)}]^2}, \quad m, r = \overline{0, N-1}, \quad m \neq r, \quad (8)$$

который является в общем случае суммой верхних границ вероятностей ошибок первого и второго рода РП проверки гипотез H_m и H_r соответственно.

Показано, что неизвестные коэффициенты $k_i^{(mr)}$, которые минимизируют функционал (7), находятся из решения системы линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{j=1}^s k_j^{(mr)} [F_{(i,j)}^{(r)} + F_{(i,j)}^{(m)}] = m_i^{(m)} - m_i^{(r)}, \quad i = \overline{1, s}. \quad (9)$$

Определение 2. Примем функционал $Ku(E, G)^{(mr)}$ (8) за критерий качества выбора РП вида (2) и будем считать наилучшем то правило, которое при $k_0^{(mr)}$ вида (7) и $k_i^{(mr)}$, найденных из (9), минимизирует правую часть (8) Данный критерий будем называть модифицированным моментным критерием верхних границ вероятностей ошибок для многоальтернативной проверки статистических гипотез.

Для качественной оценки полученных РП различения сигналов на фоне помех введем величину, которая характеризует общие верхние границы вероятностей ошибок различения гипотезы H_m при обработке N РП:

$$Ku(E, G)^{(m)} = \sum_{r=0}^{N-1} \frac{G_m^{(mr)} + G_r^{(mr)}}{[T_m^{(mr)} - T_r^{(mr)}]^2}, \quad m = \overline{1, N}, m \neq r.$$

Для неодинаково распределенных выборочных значений коэффициенты k_i РП (2) будут зависеть от выборочных значений v . В этом случае необходимо использовать стохастические полиномы 1-го типа для неодинаково распределенных выборочных значений, и обобщенное РП проверки гипотез H_m и H_r примет вид:

$$\Lambda(X)_{sn}^{(mr)} = \sum_{i=1}^s \sum_{v=1}^n k_{iv}^{(mr)} x_v^i + k_0^{(mr)} \begin{matrix} > 0 \\ < 0 \end{matrix} \begin{matrix} H_m \\ H_r \end{matrix}, \quad r, m = \overline{0, N-1}, r \neq m. \quad (10)$$

где

$$k_0^{(mr)} = -\frac{1}{2} (E_m^{(mr)} + E_r^{(mr)}) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \sum_{v=1}^n k_{iv}^{(mr)} (m_{iv}^{(m)} + m_{iv}^{(r)}).$$

Показано, что неизвестные оптимальные коэффициенты $k_{iv}^{(mr)}$ РП (10), которые минимизируют критерий качества (8), находятся из решения системы линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{j=1}^s k_{jv}^{(mr)} [F_{(i,j)v}^{(r)} + F_{(i,j)v}^{(m)}] = m_{iv}^{(m)} - m_{iv}^{(r)}, \quad v = \overline{1, n}, i = \overline{1, s}.$$

В этом случае математические ожидания и дисперсии РП (10) примут вид:

$$E_m^{(mr)} = \sum_{i=1}^s \sum_{v=1}^n k_{iv}^{(mr)} m_{iv}^{(m)}, \quad E_r^{(mr)} = \sum_{i=1}^s \sum_{v=1}^n k_{iv}^{(mr)} m_{iv}^{(r)},$$

$$G_m^{(mr)} = \sum_{i=s}^s \sum_{j=1}^s \sum_{v=1}^n k_{iv}^{(mr)} k_{jv}^{(mr)} F_{(i,j)v}^{(m)}, \quad G_r^{(mr)} = \sum_{i=s}^s \sum_{j=1}^s \sum_{v=1}^n k_{iv}^{(mr)} k_{jv}^{(mr)} F_{(i,j)v}^{(r)},$$

где $m_{iv}^{(r)}$, $m_{iv}^{(m)}$ – начальные моменты i -го порядка случайной величины ξ при гипотезах H_m и H_r для v значения соответственно;

$F_{(i,j)v}^{(r)}$, $F_{(i,j)v}^{(m)}$ – центральные коррелянты случайной величины (i, j) -го порядка при гипотезах H_m и H_r соответственно для v значения и записываются в виде:

$$F_{(i,j)v}^{(m)} = m_{(i+j)v}^{(m)} + m_{iv}^{(m)} m_{jv}^{(m)}, \quad F_{(i,j)v}^{(r)} = m_{(i+j)v}^{(r)} + m_{iv}^{(r)} m_{jv}^{(r)}.$$

Тогда общая структура РП для выбора гипотезы H_m будет отличаться от приведенной выше и примет вид:

$$H_m : \max_{m=1, N-1} \left\{ \sum_{i=1}^s \sum_{v=1}^n k_{iv}^{(m0)} x_v^i + k_0^{(m0)} \right\} > 0; \quad H_0 : \max_{m=1, N-1} \left\{ \sum_{i=1}^s \sum_{v=1}^n k_{iv}^{(m0)} x_v^i + k_0^{(m0)} \right\} < 0. \quad (11)$$

$$\sum_{i=1}^s \sum_{v=1}^n k_{iv}^{(m0)} x_v^i + k_0^{(m0)} > \sum_{i=1}^s \sum_{v=1}^n k_{iv}^{(r0)} x_v^i + k_0^{(r0)}, \quad r, m = \overline{1, N-1}, \quad r \neq m.$$

Для неодинаково распределенных выборочных значений и использовании асимптотически нормального моментного критерия качества (3) в РП (10) необходимо взять дополнительное усреднение по ансамблю выборок объемом L [6]. Тогда РП примет вид:

$$A^{(mr)}(X)_{sn} = \sum_{p=1}^L \sum_{i=1}^s \sum_{v=1}^n k_{iv}^{(mr)} x_{vp}^i + k_0^{(mr)} \underset{H_r}{\overset{H_m}{>}} 0. \quad (12)$$

В этом случае математические ожидания и дисперсии РП (12) запишутся как:

$$E_m^{(mr)} = L \sum_{i=1}^s \sum_{v=1}^n k_{iv}^{(mr)} m_{iv}^{(m)}, \quad E_r^{(mr)} = L \sum_{i=1}^s \sum_{v=1}^n k_{iv}^{(mr)} m_{iv}^{(r)},$$

$$G_m^{(mr)} = L \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s \sum_{v=1}^n k_{iv}^{(mr)} k_{jv}^{(mr)} F_{(i,j)v}^{(m)}, \quad G_r^{(mr)} = L \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s \sum_{v=1}^n k_{iv}^{(mr)} k_{jv}^{(mr)} F_{(i,j)v}^{(r)},$$

где $F_{(i,j)v}^{(m)} = m_{(i+j)v}^{(m)} + m_{iv}^{(m)} m_{jv}^{(m)}$, $F_{(i,j)v}^{(r)} = m_{(i+j)v}^{(r)} + m_{iv}^{(r)} m_{jv}^{(r)}$.

Неопределенные коэффициенты $k_{iv}^{(mr)}$ также находятся из условия минимума критерия $Yu(E, G)^{(mr)}$ (3) при решении системы уравнений:

$$\sum_{j=1}^s k_{jv}^{(mr)} \left\{ F_{(i,j)v}^{(r)} [1 + c^{(mr)}] + F_{(i,j)v}^{(m)} [1 + 1/c^{(mr)}] \right\} = m_{iv}^{(m)} - m_{iv}^{(r)}, \quad i = \overline{1, s}, \quad v = \overline{1, n}.$$

Тогда математическая структура выбора гипотезы H_m против гипотезы H_r будет отличаться от (11) и примет вид:

$$H_m : \max_{r=1, N} \left\{ \sum_{p=1}^L \sum_{i=1}^s \sum_{v=1}^n k_{iv}^{(m0)} x_{vp}^i + k_0^{(m0)} \right\} > 0; \quad H_0 : \max_{r=1, N} \left\{ \sum_{p=1}^L \sum_{i=1}^s \sum_{v=1}^n k_{iv}^{(m0)} x_{vp}^i + k_0^{(m0)} \right\} < 0.$$

$$\sum_{p=1}^L \sum_{i=1}^s \sum_{v=1}^n k_{iv}^{(m0)} x_{vp}^i + k_0^{m0} > \sum_{p=1}^L \sum_{i=1}^s \sum_{v=1}^n k_{iv}^{(r0)} x_{vp}^i + k_0^{(r0)}, \quad m, r = \overline{1, N}, \quad r \neq m.$$

На основе разработанных моделей и методов обнаружения и различения сигналов на фоне негауссовских помех созданы компьютерные средства, позволяющие провести исследования полученных результатов. Программный комплекс реализован на платформе проблемно ориентированного пакета MATLAB и включает набор программ, предназначенных для решения задач: обнаружения постоянных сигналов и радиосигналов при аддитивно-мультипликативной модели (АММ) взаимодействия с негауссовскими помехами; обнаружения постоянных сигналов при аддитивной модели взаимодействия с негауссовскими коррелированными помехами; различения постоянных сигналов, радиосигналов, шумовых сигналов при аддитивной модели

взаимодействия с негауссовскими помехами; совместного различения сигналов и оценивания их параметров при воздействии негауссовских помех.

На рис.1 представлена структурная схема формирования решений об осуществлении проверяемых статистических гипотез, основанных на использовании моментно-кумулянтного подхода к описанию случайных величин, разработанных моделей и методов, синтезированных полиномиальных алгоритмов обнаружения и различения сигналов на фоне негауссовских помех.

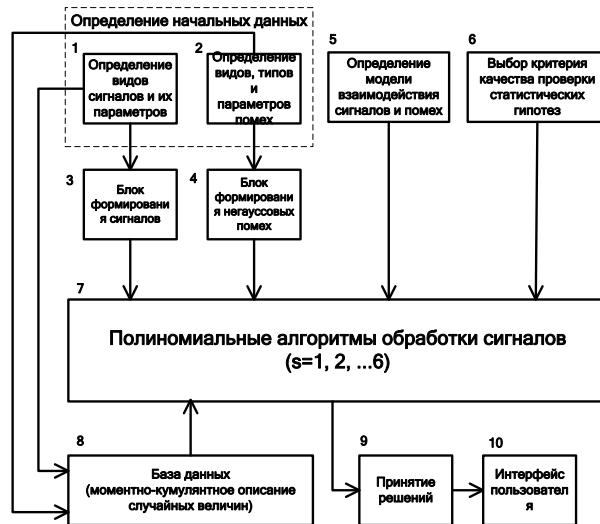


Рис. 1. Структурная схема системы формирования решений об осуществлении статистических гипотез

На структурной схеме (рис.1) в блоке «Определение начальных данных» задаются начальные условия, необходимые для определения моделей сигналов (блок 1) и помех (блок 2), формирование которых происходит в блоке 3 и 4, соответственно, а модель их взаимодействия задается блоком 5. На основании выбора критерия качества проверки статистических гипотез (блок 6) из условия решаемой задачи происходит выбор (синтез) полиномиальных стохастических алгоритмов обнаружения и различения сигналов на фоне негауссовских помех заданной степени полинома (блок 7), Степень полинома РП определяется наличием априорной информации о характеристиках исследуемых сигналов в виде набора моментов и кумулянтов, полученных из блока 8 на основании заданных пользователем моделей сигналов, помех и вида их взаимодействия.

Результат обработки случайных сигналов полиномиальными РП поступает в блок 9, где происходит сравнение полученных результатов с заданным порогом (если это относится к задаче обнаружения сигналов) либо поиска максимума решающей статистики (для вынесения решения в пользу одного из сигналов). Результат вычислений передается пользователю (блок 10).

В общем случае «Блок формирования негауссовских помех» генерирует негауссовскую случайную величину, которая характеризуется наличием/отсутствием заданных корреляционных свойств и относится к одному из классов, а именно: асимметричные, эксцессные, асимметрично-эксцессные негауссовские величины, формируемые на основании бигауссового генератора с заданными параметрами.

На рис. 2 показаны результаты моделирования серии экспериментов ($M = 100$) по обнаружению постоянного сигнала линейным ($s = 1$) и нелинейным ($s = 2$) РП при аддитивно-мультипликативном взаимодействии с негауссовской помехой.

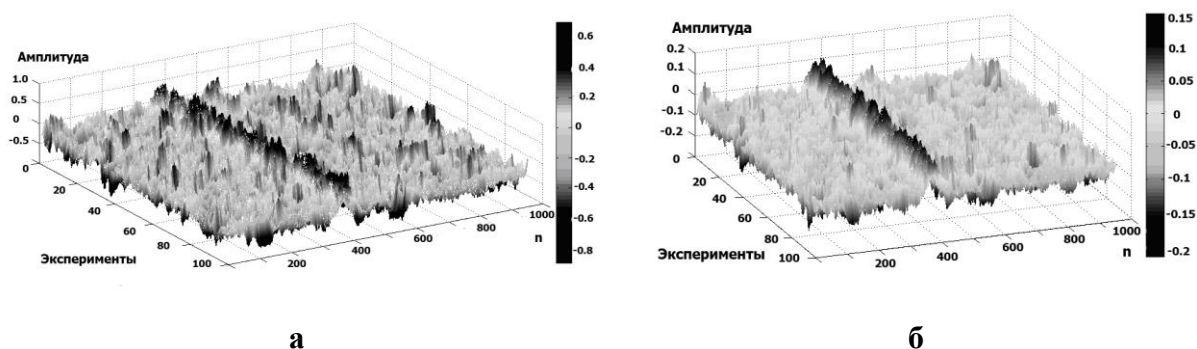


Рис. 2. Результаты серии экспериментов по обнаружению постоянного сигнала при АММ взаимодействия с негауссовской помехой при отношении «сигнал-шум» $q = 0.1$, $\gamma_4 = 0.8$, $\beta_3 = 1.0$, $\beta_4 = 0.2$: а – результаты обработки линейным РП выборочных значений сигнала при негауссовских помехах; б – обработки нелинейным РП, учитывающим кумулянты третьего и выше порядков

Из графиков видно, что результаты обработки линейным РП (рис. 2, а) (оптимальным для гауссовских помех) выборочных значений сигнала при негауссовских помехах характеризуются более частыми хаотическими выбросами и превышениями нулевого порога по сравнению с результатами обработки нелинейным РП (рис. 2, б), учитывающим кумулянты третьего и выше порядков.

Нелинейная обработка выборочных значений и учет характеристик негауссовских помех в виде коэффициентов асимметрии (γ_3 , β_3) и эксцесса (γ_4 , β_4) аддитивной и мультипликативной составляющей позволяет уменьшать ошибочные решения РП по сравнению с известными результатами.

На основе разработанного программного комплекса проведены эксперименты, подтверждающие полученные теоретические результаты. На рис. 3 представлено сопоставление теоретических (непрерывная линия) и экспериментальных (дискретные значения) исследований по сравнению значений критериев качества линейных РП ($s=1$) и нелинейных РП ($s=2$) при АММ взаимодействия радиосигнала с негауссовской помехой по разным моментным критериям качества $Ku(E, G)$ (а) и $Yu(E, G)$ (б). Из графиков видно, что нелинейная обработка выборочных значений и учет параметров негауссовских помех позволяет повысить точность обработки сигналов по сравнению с линейной, причем это проявляется в уменьшении вероятности ошибок первого и второго рода РП.

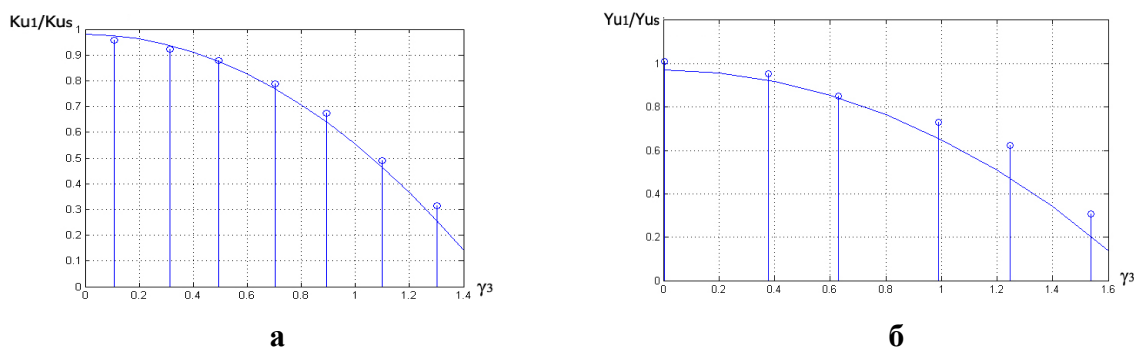


Рис. 3. Результаты сравнения теоретических и экспериментальных исследований значений критериев качества для линейных ($s=1$) и нелинейных ($s=2$) РП обнаружения радиосигнала при АММ взаимодействия с негауссовской помехой при: а - $q = 0.06$, $\gamma_4 = 0.09$, $\beta_3 = 0.1$, $\beta_4 = 0.1$; б - $q = 0.125$, $\gamma_4 = 0.6$, $\beta_3 = 1.5$, $\beta_4 = 0.8$.

Для моделирования процесса различения радиосигналов на фоне негауссовских помех на рис.4 демонстрируются результаты обработки выборочных значений полиномиальными РП при степени $s = 1,2$ для различения двух радиосигналов. Как видно из проведенных исследований, линейные РП (верхние графики) дают ошибочные решения о наличии второго радиосигнала, в то время как нелинейные РП дают правильное решение о наличии первого радиосигнала.

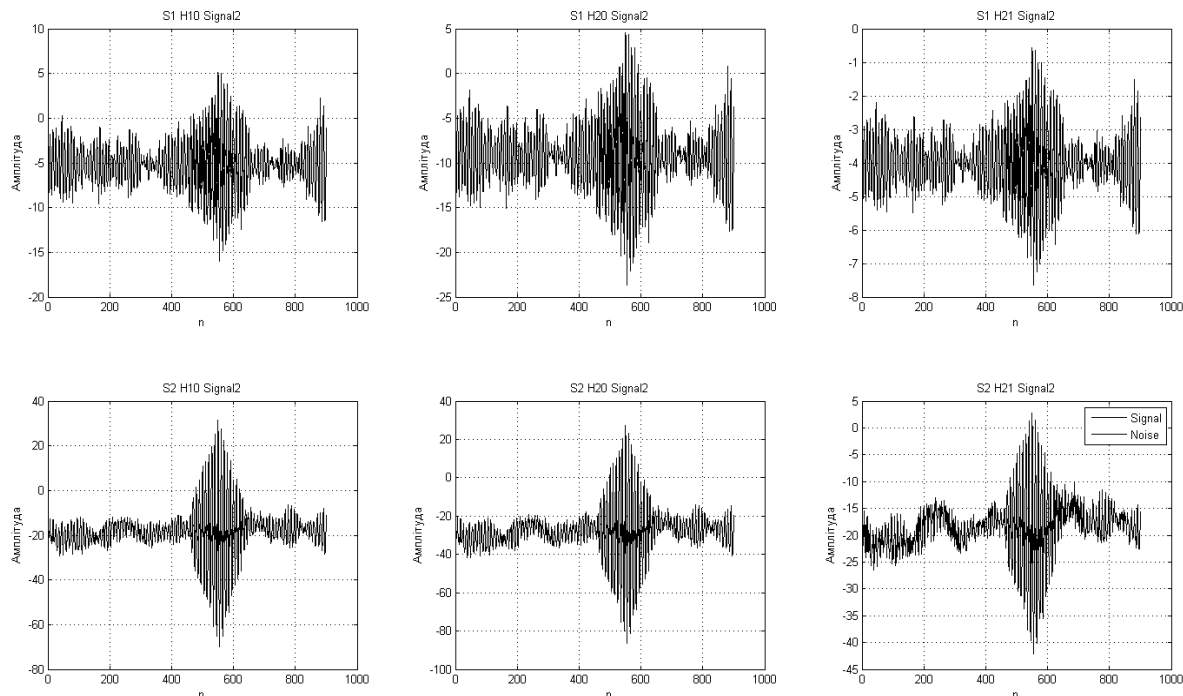


Рис. 4. Результаты моделирования различения радиосигналов на фоне негауссовских помех линейными и нелинейными РП.

Выводы

На основе создания и развития методов математического и компьютерного моделирования процессов обнаружения и различения сигналов на фоне негауссовских помех при разработке моментно-кумулянтных моделей случайных величин, формирования моментных критериев качества проверки статистических гипотез и полиномиальных методов обработки сигналов предложены алгоритмические основы и средства компьютерной реализации обработки сигналов, что позволяет повысить точность обнаружения и различения сигналов в таких компьютеризированных системах приема данных, как системы мониторинга, контроля, диагностики, управления при учете характеристик негауссовских помех.

Список литературы

1. Van Trees, H. L. Detection Estimation and Modulation Theory [Text] / H. L. Van Trees, K. L. Bell, Z. Tiany // John Wiley & Sons. — 2013. — P.1176.
2. Middleton, D. Introduction, in Non-Gaussian Statistical Communication / D. Middleton // Theory, John Wiley & Sons. — 2012. — С.283–396.
3. Безрук, В.М. Теоретические основы проектирования систем распознавания сигналов для автоматизированного радиоконтроля / В.М. Безрук., Г.М. Певцов. // Монография. — Х.: Коллегиум, 2007 – 430 с.

4. Малахов, А. Н. Кумулянтный анализ негауссовских процессов и их преобразований / А. Н. Малахов – М.: Сов. радио, 1979. – 376 с.
5. Kunchenko, Y. Polynomial Parameter Estimations of Close to Gaussian Random variables / Y. Kunchenko // Aachen: Shaker Verlag. — 2002. — P.396.
6. Палагин, В.В. Адаптация моментного критерия качества для многоальтернативной задачи проверки гипотез при использовании полиномиальных решающих правил / В.В. Палагин // Электронное моделирование. — 2010. — Т.32. — №4. — С.17–33.
7. Палагин, В.В. Моментный критерий качества проверки статистических гипотез для обработки сигналов на фоне коррелированных негауссовских помех // Системи обробки інформації. Харківський університет повітряних сил ім. Івана Кожедуба. — 2009. — Випуск 4(78). — С.96–101.
8. Палагін, В.В. Комп'ютерне моделювання поліноміальних алгоритмів розрізнення радіосигналів та оцінювання їх параметрів / В.В. Палагін, А.В. Гончаров, В.М. Уманець // Східно-Європейський журнал передових технологій. — 2014. — Т. 5. — № 9 (71). — С. 31–39. — ISSN 1729-3774

ПРОГРАМНІ ЗАСОБИ КОМП'ЮТЕРНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ВИЯВЛЕННЯ І РОЗРІЗНЕННЯ СИГНАЛІВ НА ФОНІ НЕГАУСОВИХ ЗАВАД

В.В. Палагін

Черкаський державний технологічний університет
бул. Шевченка, 460, Черкаси, 18005, Україна; e-mail: palahin@yahoo.com

Розглянуто питання моделювання процесів виявлення та розрізнення сигналів на фоні негаусових завад на основі моментно-кумулянтного представлення випадкових величин з формуванням моментних критеріїв якості перевірки статистичних гіпотез і поліноміальних розв'язувальних правил для забезпечення побудови ефективних методів і комп'ютерних засобів функціонування систем прийому і обробки даних. Показано, що нелінійна обробка вибіркового значень, врахування параметрів негаусового розподілу у вигляді кумулянтних коефіцієнтів третього і вище порядків дозволяє збільшити ефективність обробки даних у вигляді зменшення ймовірностей помилки першого і другого роду в порівнянні з відомими результатами.

Ключові слова: моментні критерії якості, перевірка статистичних гіпотез, негаусові завади.

SOFTWARE TOOLS OF COMPUTER SIMULATION SIGNALS DETECTION AND DISTINCTION ON BACKGROUND NON-GAUSSIAN NOISE

V. Palahin

Cherkasy State Technological University
Shevchenko blvd., 460, Cherkasy, Ukraine, 18005; e-mail: palahin@yahoo.com

The questions of modeling processes signals detection and recognition on background non-Gaussian noise, based on the moment-cumulant description of random variables with the formation of the moment quality criterion of statistical hypothesis testing and polynomial decision rules for the synthesis of effective methods and computer-functioning systems for receiving and processing data. It is shown that the nonlinear processing of sample values, taking into account parameters non-Gaussian distribution as cumulant coefficients of the third and higher orders can increase the efficiency of data processing in the form of reducing the probability errors of the first and second kind in comparison with the known results.

Keywords: the moment criterion quality, statistical hypothesis testing, non-Gaussian noise.

IRIS LOCALIZATION IN BIOMETRIC PERSONAL IDENTIFICATION SYSTEMS DEVELOPED FOR MOBILE DEVICES

K.O. Tryfonova, E.I Grishikashvili, O.V. Narimanova, A.R. Agadzhanian

Odessa national polytechnic university,
1 Shevchenko Ave., Odessa 65044, Ukraine; e-mail: katikkatik@gmail.com

Biometric personal identification based on iris recognition is considered as one of the most accurate, reliable and stable identification systems. The purpose of the research is solving the problem of iris localization for developing biometric identification system for mobile devices. The system also cares about protection of biometric data and templates, which is a crucial requirement when designing a biometric based authentication system. The Hough transform algorithm was used to address this problem. The algorithm runs in 3 separate steps: image binarization, creating accumulator array and threshold segmentation. The Hough transform algorithm was implemented using Android SDK and high level programming language Java.

Keywords: Hough transform, localization, Hough space, segmentation, iris recognition

Introduction

One of the most important tasks of software engineering is information security. Passwords are a common means of verifying a user's identity before access is given to information. Despite of easy to use and implement, the password security has its disadvantages, as it is highly dependent on human factors such as choosing a secure password. It is something that many people find difficult.

The increasing battle with cyber security has led to the birth of biometric security systems. Biometrics refers to unique physiological human characteristics that help in identifying an individual. Iris recognition security systems are one of the most accurate methods of biometric identification.

By virtue of these advantages, the next-generation operating system - Windows 10 will feature brand new biometric authentication system - Windows Hello. Windows Hello will support iris authentication. Alongside Windows Hello, Microsoft is also divulgence Passport, a new complement that apps and websites can use for biometric authentication.

Despite advantages, there are several open issues involved with these biometric identification systems. Biometric systems based on iris are vulnerable to direct attacks consisting on the presentation of a fake iris. Resourceful hackers can covertly acquire the biometric characteristics of a genuine user, use fake-eye or contact lenses to implement attacks on iris templates.

A group of researchers from Spain and the United states successfully demonstrated at Black hat conference how extremely easy is to implement attacks using fake biometric characteristics. Genetic algorithms were used to design images, which produced a near identical iris code as the original iris image when scanned. According to scientists, even the most reliable and modern iris scanners can be easily fooled by obtained results.

Everything mentioned above manifest that developers pay too little attention this the problem.

Almost all leading companies, telecommunication equipment and product manufacturers are working on the implementation or already have offered complete system solutions for human identification based on iris recognition.

In addition, despite the possibility of downloading already proposed systems on mobile devices for free, the implementation details are left in strict confidentiality, thereby limiting researchers and developers to expand the ready-made solutions.

Therefore, the iris recognition system must be implemented before solving the problem of biometric identification system implementation running on mobile devices with the protection against forgery biometric features.

Purpose of study and problem formulation

The overall aim is to implement biometric personal identification system based on iris analysis with protection against forgery of biometric features for mobile devices.

The first stage of this biometric method is localization, i.e determining the center of pupil and edges of iris in the digital image of human eye. To solve the problem of localization the Hough transform algorithm can be used.

The aim of this work is to solve the problem of localization of iris in human eye for implementing biometric identification system with feature template protection for mobile platforms.

Main section

The Hough transform is one of the most effective methods for detecting analytic curves in a digital image. In the Hough transform, a main idea is to consider the characteristics of the curve not as image points, but instead, in terms of its parameters [1]. The Hough transform algorithm builds Hough space for detecting curves, the size of the space is determined by the number of parameters of the curve. The primary step in Hough method is mapping a digital image into Hough space followed by the procedure of analysis.

The Hough method consists of the following steps: binarization; creating accumulator array; threshold segmentation.

Let us dig into each of these in more detail.

Binarization

The first step of the algorithm is the binarization of a digital image. The Canny edge detection algorithm can be used for finding contours [2]. The results of this step define the efficiency of Hough transform. Fig.1 shows the binary image edges $\tilde{K} = [\tilde{k}_{ij}]_{i=1, j=1}^{n,m}$ obtained after Canny edge detection algorithm using double thresholding where $T_L = 0.1$, $T_H = 0.32$.



Fig. 1. Canny edge detection results: a – input image; b – binary representation of the edges

Creation of an accumulator array

The next step of the Hough transform algorithm is to map digital image to Hough space.

Let \tilde{k}_{ij} be the value of the binary matrix of edges of the digital image $\tilde{K} = [\tilde{k}_{ij}]_{i=1, j=1}^{n,m}$ where i raw and j column intersect. The coordinate system used for all examples in this document has the origin in the upper left, with the x axis extending to the right and y axis extending downwards.

A single point in the coordinate system of a digital image can be represented by a set of circles. If this point has coordinates (i, j) , then each circle that passes this point corresponds to the following equation:

$$(i - a)^2 + (j - b)^2 = R^2 \tag{1}$$

where (a, b) is a center, R – radius.

The set of parameter values $a \in [1, n], b \in [1, m], R \in [1, \max(n, m)]$ forms phase space or Hough space X , each point of which corresponds to some circle. Hough space X with set of points (a, b, R) represents three-dimensional space, which is transformed to two-dimensional space (a, b, R_0) if radius is known. The set of centers of circles with radius equal to R_0 , which pass through the point (i, j) define circles in Hough space with radius R_0 .

For each point (a, b, R_0) of the space X can be defined a corresponding indicator, which represents the number of points (i, j) of the circle with center (a, b) and radius R_0 . Matrix $Z_{R_0} = [z_{abR_0}]_{a=1, b=1}^{n,m}$, each element of which is defined using above described method – is an accumulator array in Hough space:

$$z_{abR_0} = \sum_{(a-i)^2 + (b-j)^2 = R_0^2} \tilde{k}_{ij} \tag{2}$$

Figure 2, 3 shows a the synthetic digital image of the circle, the image contour is obtained using Canny edge detector algorithm (fig. 2, b). Due to known radius $R_0 = 50$ Hough space is two-dimensional. The equation (2) is used for building accumulator array Z_{R_0} . For more clarity accumulator array is represented in two-dimensional (fig. 2, c) and three-dimensional spaces (fig. 3).

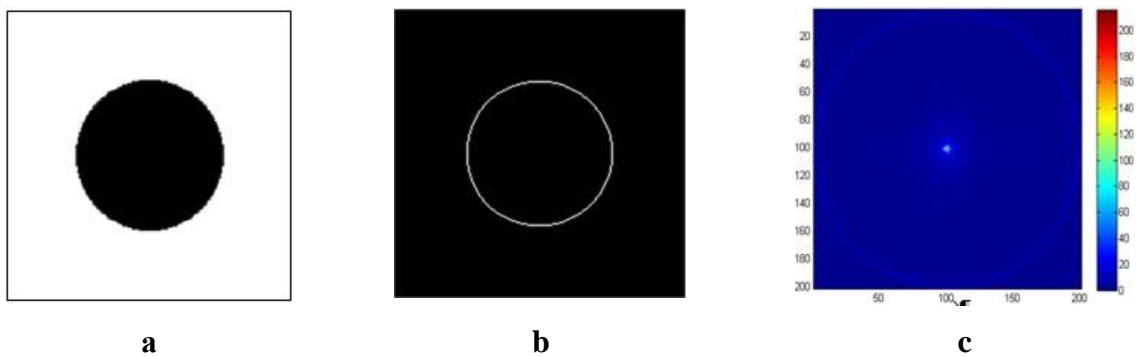


Fig. 2. Building accumulator array for synthetic image: a – original digital image; b – binary representation of digital image contours; c – two-dimensional representation of accumulator array

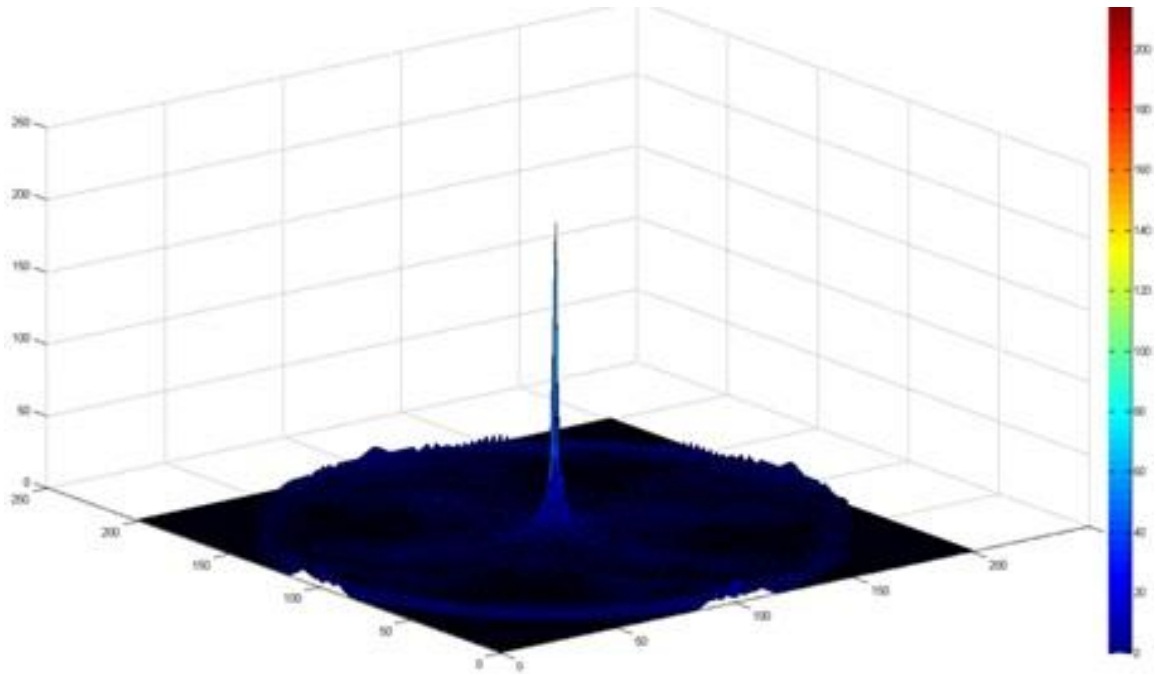


Fig. 3. Building accumulator array for synthetic image: three-dimensional representation of accumulator array

Figure 4 shows two-dimensional and three-dimensional representation of accumulator array for realistic digital image of pupil and iris of human eye (fig. 1). Accumulator array is built to find center of circle with radius $R_0 = 75$.

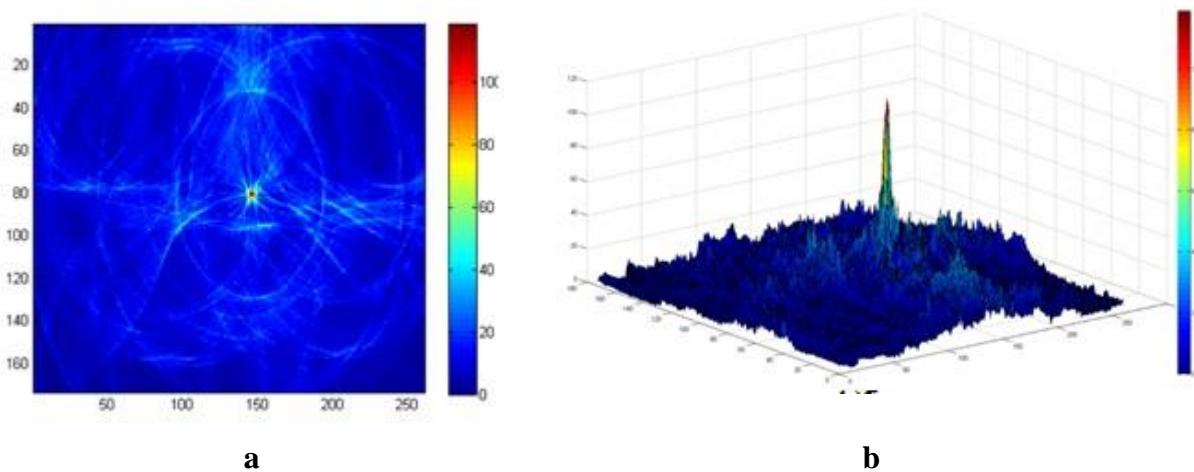


Fig. 4. Building an accumulator array for realistic image: a – two-dimensional representation of accumulative array; b – three-dimensional representation of accumulative array

Threshold segmentation

The final step is to analyze accumulator array for determining the parameters of analytical curve in digital image.

After mapping digital image to Hough space, using equation (2), accumulator array is obtained, each element of which Z_{abR_0} equals to the number of non-zero values \tilde{k}_{ij} , belonging to potential circle with center (a,b) and radius R_0 .

Therefore, for each element Z_{abR_0} of matrix Z_{R_0} the following is true:

$$z_{abR_0} \leq [2\pi R_0] \quad (3)$$

Synthetic digital image (fig. 2) contains a circle, hence the indices of extremums of accumulator array $z_{100,100}$, correspond to center coordinates of circle $(100, 100)$ with the radius $R_0 = 50$ in digital image.

For realistic digital image a variety of methods for Hough space analyses can be used, for instance, searching fixed local maxima, threshold segmentation of accumulator array or searching global maxima of accumulator array with gradual exclusion.

While determining the circle parameters, which is the model of iris, threshold segmentation of accumulator array was applied to a realistic digital image or frame sequence of digital video [3], as the result $\tilde{Z}_{R_0} = [\tilde{z}_{abR_0}]_{a=1,b=1}^{n,m}$ is obtained

$$\tilde{z}_{abR_0} = \begin{cases} z_{abR_0}, & \text{if } z_{abR_0} \geq 0.9(2\pi R_0) \\ 0, & \text{if } z_{abR_0} < 0.9(2\pi R_0) \end{cases} \quad (4)$$

To obtain the image of iris with a diameter of 100 pixels, which is considered as low-quality standard [4] on the camera with resolution of 1000x800 pixels the user eye must enter the area of 9x7 centimeters. Therefore, for further analysis of the iris to solve the problem of person identification for mobile device the radius from $R_0 \in [60;90]$ is selected. With specified radius range the procedure of threshold segmentation is applied to each accumulator array. The sequence of arrays $\tilde{Z}_{R_0} = [\tilde{z}_{abR_0}]_{a=1,b=1,R_0=60}^{n,m,90}$ contains non-zero values, indices of which correspond to parameters of the circles. To choose parameters of the single circle let us

consider the relative value $\hat{Z}_{R_0} = \left[\frac{\tilde{z}_{abR_0}}{2\pi R_0} \right]_{a=1,b=1,R_0=60}^{n,m,90}$ and select the maximum value

$$[\hat{a}, \hat{b}, \hat{R}_0] = \underset{a=1,b=1,R_0=60}^{n,m,90} \text{Max} \left(\frac{\tilde{z}_{abR_0}}{2\pi R_0} \right), \quad (5)$$

where the function $\max(x)$ returns the coordinates of the center (\hat{a}, \hat{b}) and the radius \hat{R}_0 of the circle.

Figure 5 shows the sequence of accumulator arrays for $R_0 = 65$, $R_0 = 70$, $R_0 = 75$, $R_0 = 80$, $R_0 = 85$, $R_0 = 90$ for determining parameters of the circle corresponding to the iris of human eye (fig. 1). After applying threshold segmentation (4) to each accumulator array only threshold accumulator array \tilde{Z}_{75} (fig. 5, c)) for $R_0 = 75$ contains non-zero values. Equation (5) outputs the center of the circle $(147,81)$.

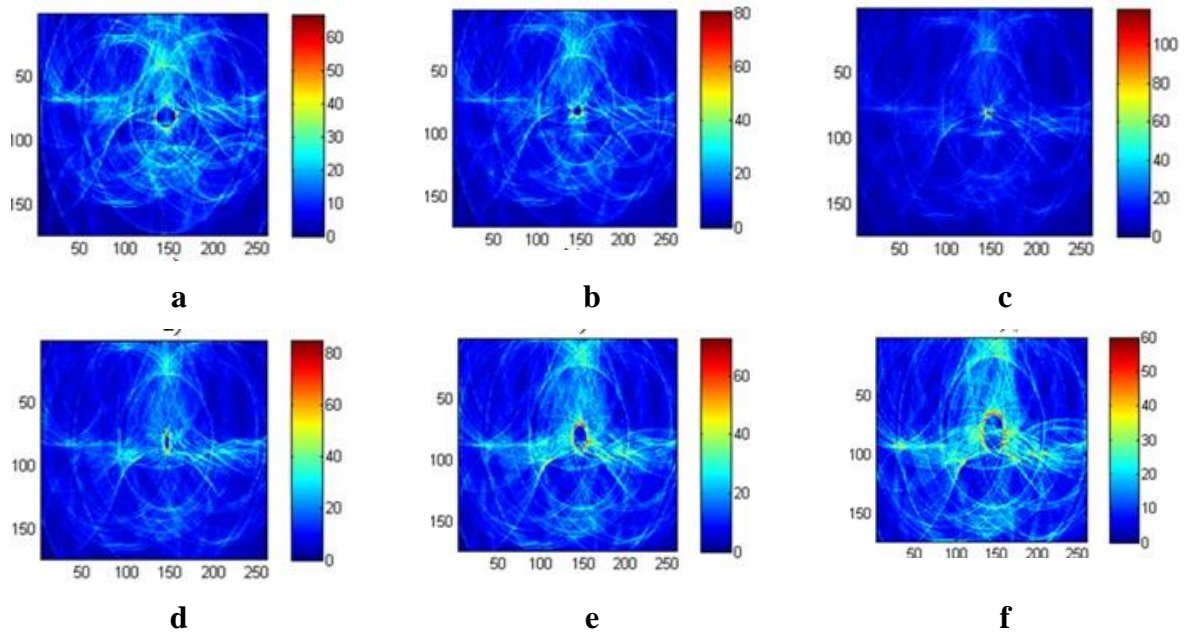


Fig. 5. Analysis of an accumulator array: a – $R_0 = 65$; b – $R_0 = 70$; c – $R_0 = 75$; d – $R_0 = 80$; e – $R_0 = 85$; f – $R_0 = 90$

Figure 6 shows the result of the Hough algorithm.



Fig. 6. The Hough algorithm usage: a – determining the parameters of iris; b – determining the parameters of pupil

Conclusion.

As a result of this work, the Hough transform algorithm was implemented for the iris localization, which is the first step in the implementation process of the biometric identification system with feature template protection for mobile devices.

The resulting application was developed for android platform using high-level programming language – Java. The further work aims implementing fully functioning biometric person identification system for mobile devices.

Sources

1. Duda, R.O. Use of the Hough transform to detect lines and curves in pictures / R.O. Duda, P.E. Hart. – 2005. – Vol.15. – №11. – P.11–15
2. Трифонова, К.О. Визначення контурів райдужної оболонки ока для системи біометричної ідентифікації людини / К.О. Трифонова, Е.І. Гришикашвілі, А.Р. Агаджанян // Труды Одесского политехнического университета. – 2015. – Вып.1(45). – С.107–112
3. Гонсалес, Р. Цифровая обработка изображений / Р. Гонсалес, Р. Вудс. – М.: Техносфера, 2005. – 1104 с.
4. ГОСТ Р ИСО/МЭК 19794-6-2006. Автоматическая идентификация. Идентификация биометрическая. Форматы обмена биометрическими данными. Часть 6. Данные изображения радужной оболочки глаза. – М.: Стандартинформ, 2006. – 23 с.

ЛОКАЛІЗАЦІЯ РАЙДУЖНОЇ ОБОЛОНКИ ОКА ДЛЯ МОБІЛЬНОЇ СИСТЕМИ БІОМЕТРИЧНОЇ ІДЕНТИФІКАЦІЇ ЛЮДИНИ

К.О. Трифонова, Е.І. Гришикашвілі, О.В. Наріманова, А.Р. Агаджанян

Одеський національний політехнічний університет,
просп. Шевченко 1, Одеса 65044, Україна; e-mail: katikkatik@gmail.com

Метод біометричної ідентифікації людини за райдужною оболонкою ока вважається одним з найбільш точних і надійних способів ідентифікації. Метою дослідження є вирішення задачі локалізації райдужної оболонки ока людини для можливості реалізації біометричної системи ідентифікації людини засобами мобільного пристрою. Для досягнення поставленої мети в роботі розглянуто алгоритм методу Хафа, який складається з наступних кроків: бінаризація, побудова акумулятивної матриці, порогова сегментація акумулятивної матриці. Проведена програмна реалізація алгоритму Хафа для мобільної платформи Android з використанням засобів мови програмування високого рівня Java.

Ключові слова: метод Хафа, локалізація, простір Хафа, порогова сегментація, райдужна оболонка ока

ЛОКАЛИЗАЦИЯ РАДУЖНОЙ ОБОЛОЧКИ ГЛАЗА ДЛЯ МОБИЛЬНОЙ СИСТЕМЫ БИОМЕТРИЧЕСКОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ ЧЕЛОВЕКА

К.А. Трифонова, Е.И. Гришикашвили, Е.В. Нариманова, А.Р. Агаджанян

Одесский национальный политехнический университет,
просп. Шевченко 1, Одесса 65044, Украина; e-mail: katikkatik@gmail.com

Метод биометрической идентификации человека по радужной оболочке глаза считается одним из самых точных и надежных способов идентификации. Целью исследования является решение задачи локализации радужной оболочки глаза человека для возможности реализации биометрической системы идентификации человека средствами мобильного устройства. Для достижения поставленной цели в работе рассмотрен алгоритм метода Хафа, который состоит из следующих шагов: бинаризация, построение аккумулятивной матрицы, пороговая сегментация аккумулятивной матрицы. Проведена программная реализация алгоритма Хафа для мобильной платформы Android с использованием средств языка программирования высокого уровня Java.

Ключевые слова: метод Хафа, локализация, пространство Хафа пороговая сегментация, радужная оболочка глаза

ПІДТРИМКА ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ ПРИ ФОРМУВАННІ ПРОГРАМ ІНФОРМАЦІЙНОЇ БЕЗПЕКИ ДЕРЖАВИ: ОЦІНКА ЕФЕКТИВНОСТІ ПРОГРАМ

С.В. Зибін, В.О. Хорошко

Національний авіаційний університет,
просп. Космонавта Комарова, 1, Київ, 03680, Україна; e-mail: professor_va@ukr.net

Запропоновано метод побудови ієрархії цілей програм забезпечення інформаційної безпеки держави (ПБД) з урахуванням загроз і ризиків. Описані розроблені методи визначення кількісних показників відносної ефективності з урахуванням загроз і ризиків, напрямків виконання ПБД, задач ПБД, засобів протидії загрозам і ризикам.

Ключові слова: підтримка прийняття рішень, моделі загроз і ризиків, інформаційна безпека, ієрархія цілей, цільова оцінка.

Вступ

Комплексна програма забезпечення інформаційної безпеки держави (ПБД) являє собою сукупність заходів, які об'єднані єдністю глобальної мети й загальними ресурсами. Основні задачі розробки складних ПБД – це відбір програм, які є частиною комплексної програми, й розподіл між ними ресурсів. При цьому ПБД, як правило, може плануватися на великі проміжки часу, тому необхідно оцінювати ефективність програм на заданому інтервалі часу. При розробці ПБД слід враховувати можливість виникнення загроз і ризиків, аналізувати їхній вплив і на цій основі передбачати заходи щодо протидії їм або усунення їх. При формуванні ПБД із урахуванням загроз і ризиків необхідно вирішувати задачі: визначення кількісних характеристик впливу загроз і ризиків на ефективність ПБД; визначення кількісних показників ефективності програм при наявності загроз і ризиків; розподіл ресурсів між засобами протидії загрозам і ризикам та ПБД.

Відомі методи рішення першої задачі передбачають ідентифікацію ризиків (якісний аналіз), а також оцінювання ймовірностей і розмірів можливого збитку (кількісний аналіз). Однак при цьому задача оцінки ефективності програм з урахуванням ризиків не вирішується й залишається на розсуд експерта – особи, що приймає рішення (ОПР). Більше того, визначення збитку в абсолютному вимірі часто неможливо для складних ПБД.

Дана стаття є продовженням роботи [1] і присвячена викладанню запропонованого методу опису порівняльної небезпеки загроз і ризиків, а також ПБД з урахуванням загроз і ризиків, який являє собою модифікацію методу цільового динамічного оцінювання програм і задач на інтервалі часу [2].

Основна частина

Побудова ієрархії підцілей здійснюється в три етапи. На першому й другому етапах будується ієрархія цілей без обліку загроз і ризиків, на третьому етапі в ієрархію

вводяться моделі цих факторів. При цьому на першому етапі виконується просування зверху вниз, а на другому – у зворотному напрямку.

Сутність першого етапу (процедури) полягає в наступному. Поставимо питання перед експертом: досягнення яких підцілей $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ безпосередньо впливає на досягнення головної цілі програми? Щодо кожної з них можливо поставити питання: чи можна виразити результат повного досягнення підцілі результатом виміру однієї величини (ефектом)? Якщо так, тоді маємо підціль, кількісну по виходу, інакше – якісну. Якщо підціль є кількісною по виходу, то експерт повинен визначити: чи напевно відоме значення ефекту? Якщо так, тоді маємо кількісну по виходу визначену підціль, інакше – кількісну по виходу невизначену.

Далі експерт визначає: досягнення підцілі позитивно або негативно впливає на досягнення надцілі? Крім визначення множини підцілей, перша процедура передбачає визначення також і типу надцілі. Поставимо питання: чи можна виразити умову досягнення надцілі результатом виміру деякої, однієї, реальної величини (ресурсу)? При позитивній відповіді – ціль кількісна по входу, а якщо ні, то якісна. Якщо ціль кількісна по входу, то експерт повинен визначити: чи напевно відоме значення ресурсу? Якщо так, тоді маємо кількісну по входу визначену ціль, інакше – кількісну по входу невизначену.

Розглянемо підціль λ_1 . На цьому етапі експерт повинен визначити: чи являється підціль λ_1 ціллю реалізації якої-небудь задачі або програми? Якщо так, тоді подальша декомпозиція підцілі λ_1 не потрібна. Якщо ні, то поставимо те ж запитання, яке ставиться до головної цілі, але тепер замість головної цілі в питанні буде фігурувати підціль λ_1 . Крім того, при визначенні підцілей для λ_1 спочатку спробуємо знайти підцілі серед списку цілей, які раніше були названі при аналізі інших надцілей. Цей список може містити й головну ціль програми. За рахунок цього можуть встановлюватися зворотні зв'язки між підцілями й надцілями.

Тепер експерт повинен визначити тип цілі λ_1 , ставлячи ті ж запитання, що стосувалися б головної цілі. Крім того експерт поставить питання: чи впливає будь-який приріст ступеня досягнення підцілей цілі λ_1 на ступінь її досягнення? Якщо так, тоді маємо квазілінійну ціль λ_1 , інакше ціль λ_1 порогова. В останньому випадку експерт визначає величину її порога, тобто яка повинна бути ступінь досягнення цілі, щоб це позначилося на ступені досягнення головної цілі. Повторюючи цей процес для всіх підцілей, які занесено у список, побудуємо ієрархію підцілей, на досягнення яких впливає реалізація задач ПБД. Неважко помітити, що реалізація описаного алгоритму завжди забезпечить включення всіх задач ПБД в ієрархію. Але декомпозиція не всіх підцілей першого рівня обов'язково завершиться якою-небудь задачею. Це наслідок того, що в загальному випадку задачі ПБД можуть відбивати не всі аспекти досягнення головної цілі ПБД. Оскільки умовою завершення декомпозиції деякої надцілі є співпадіння який-небудь її підцілі з ціллю задачі ПБД, тоді в загальному випадку знайдеться хоча б одна підціль першого рівня, декомпозиція якої ніколи не завершиться, оскільки така задача відсутня в ієрархії. Щоб алгоритм завершив роботу за скінченну кількість кроків, введемо ще одну умову зупинки його виконання: декомпозиція всіх цілей завершується, як тільки ціль будь-якої задачі співпала з якою-небудь підціллю. Раніше було описано алгоритм побудови ієрархії цілей для відбору найбільш ефективних задач, які доцільно включати в ПБД. Також запропонований метод можна застосувати й для визначення найбільш ефективних напрямків реалізації ПБД, які доцільно підтримувати, задаючи відповідні задачі. У цьому випадку ієрархія будується аналогічно, за тим тільки виключенням, що розробник ПБД сам визначає достатність ступеня деталізації й припиняє подальшу декомпозицію.

На другому етапі виконується процедура просування знизу нагору, яка полягає в тому, що для кожної підцілі визначаються всі безпосередні надцілі, тобто цілі, на досягнення яких безпосередньо впливає досягнення підцілі, яку аналізують.

На останньому етапі в ієрархію вводяться моделі загроз і ризиків. В [1] запропонована модель загрози, що впливає на кілька цілей і, можливо, програм. Для встановлення впливу на ці елементи ієрархії експерти послідовно аналізують всю множину введених в ієрархію на перших двох етапах цілей і програм (задач) і визначають вплив на них відповідної загрози. Відзначимо, що задачі, які є моделями загроз, можуть мати підцілі (підзадачі), які є моделями засобів нейтралізації загрози. Вони визначаються також, як підцілі звичайних цілей.

Введення моделей ризиків здійснюється в такий спосіб. Спочатку визначаються фактори ризиків, які повинні бути враховані. Потім відповідно до [1] будуються цілі, що виступають індикаторами відповідних ризиків, і визначаються їхні параметри, аналогічно тому, як це мало місце для основної ієрархії. На останньому кроці встановлюють зв'язки введених індикаторів ризиків з елементами побудованої ієрархії (цілями й задачами).

Оцінювання відносної ефективності елементів ПБД із урахуванням ризиків і загроз передбачає рішення таких задач оцінювання: відносної ефективності напрямку виконання ПБД із врахуванням загроз і ризиків; відносної ефективності заданої множини загроз і ризиків; відносної ефективності засобів протидії загрозам і ризикам.

Основу методу, що пропонується, визначають дві головні ідеї: використання як показника ефективності ступеня впливу виконання задачі (програми досягнення цілі) на ступінь досягнення головної цілі ПБД; включення в ієрархію цілей ПБД задач, які є моделями загроз або індикаторами ризиків.

Задача оцінки відносної ефективності програм на інтервалі часу з врахуванням загроз і ризиків зводиться до ступеня впливу на досягнення головної цілі виконання оцінюваних програм (задач) при наявності цих факторів. Потім використовується поняття простих і складних програм (задач) [2]. Простою називають програму, яку розглядають в рамках ПБД як єдине ціле. У той же час складна програма (задача) складається з низки взаємозалежних простих програм.

Часткові коефіцієнти впливу підцілей і програм (задач) у загальному випадку залежать від часу. Тому ступені досягнення надцілей, у тому числі й головної, також залежать від часу. Отже, можна говорити про миттєві значення показників ефективності простих і складних програм (задач).

Визначення 1. Миттєве значення $\varphi_k(\varphi)$ показника відносної ефективності (ПВЕ) складної програми (задачі) CD_k у момент часу t від початку його реалізації дорівнює

$$\varphi_k(t) = F[A_0(D)_k, A_0(D \setminus CD_k)_t],$$

де D – множина всіх простих програм (задач) ПБД;

$A_0(D)_t$ – ступінь досягнення головної цілі в момент часу t за умови включення в ПБД всіх простих програм (задач) $SD_i \in D$;

$A_0(D \setminus CD_k)_t$ – ступінь досягнення головної цілі в момент часу t за умови включення в ПБД всіх простих програм (задач) $CD_i \in D$, за винятком простих програм (задач), які входять до складної задачі (програми) CD_k ;

Вид функції F (наприклад, різниця, відношення й т.п.) не залежить від структури ієрархії й типу цілей і визначається зручністю сприйняття інформації ОПР.

У такий спосіб CD_k може бути охарактеризоване множиною миттєвих значень його показника відносної ефективності, обчислених для множини моментів часу на деякому заданому інтервалі τ . При цьому оцінювання множини CD_k в ході прийняття

рішення зводиться до обчислення деякої визначеної ОПР функції T , яка задана на множині значень показників відносної ефективності задачі (програми) в момент часу з інтервалу τ . У якості такої функції можуть використовуватися:

$$T_k = \sup_{0 \leq t \leq \tau} (\varphi_k(t)) \text{ або } T_k = \int_0^{\tau} \varphi_k(t) * dt,$$

де $\varphi_k(t) *$ – найкраща відносно деякого критерію (наприклад, критерій, що забезпечує мінімум суми середньоквадратичних відхилень) апроксимація множини миттєвих значень $\varphi_k(t)$ для моментів часу з інтервалу $[0, \tau]$.

Крім задачі оцінювання складної програми, виникає задача оцінювання простої програми в межах заданої складної програми. Тому відносно простої задачі (програми) SD_i можна говорити про значення показника φ_{ik} його відносної ефективності в межах складної програми (задачі) CD_i . У загальному випадку: $\varphi_{ih} \neq \varphi_i$; $h \neq k$.

Визначення 2. Миттєве значення $\varphi_{ik}(t)$ показника відносної ефективності простої задачі й програми SD_i у складі складної задачі CD_i у момент часу t від початку реалізації CD_k дорівнює: $\varphi_{ik}(t) = F(\varphi_k(t), \varphi_{k-i})$, де $\varphi_k(t)$ – значення показника відносної ефективності складної задачі або програми CD_k у момент часу t ; φ_{k-i} – значення показника відносної ефективності складної задачі або програми CD_k у момент часу t , яка не містить простої програми або задачі SD_i . У загальному випадку: $\varphi_{ih} \neq \varphi_i$; $h \neq k$.

Таким чином, динамічне оцінювання простої задачі (програми) $SD_i \in CD_k$ у ході визначення показника його відносної ефективності на заданому інтервалі часу зводиться до обчислення показників відносної ефективності двох складних задач CD_h і CD_{h-i} у деякій множині моментів часу із цього інтервалу. В свою чергу, задача обчислення показника відносної ефективності CD_h зводиться до обчислення в ці моменти часу величин: $A_0(D)_\tau$ – ступеня досягнення головної цілі в момент часу t за умови повної реалізації всіх $SD_i \in D$ і $A_0(D \setminus CD_k)_\tau$ – ступеня досягнення головної цілі в момент часу t за умови повної реалізації всіх $SD_i \in D$, за винятком простих програм, які входять в CD_h . Зазначені умови, при яких обчислюється ступінь досягнення головної цілі, визначається множиною. В програмах (задачах), що аналізуються, цю множину зручно задавати вектором $A_B = \{A_{B_q}\}$, $q = \{1, |D|\}$, ступенів реалізації програм або задач, компоненти якого

$$A_{B_q} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } SD_q \in B; \\ 0, & \text{якщо } SD_q \notin B. \end{cases}$$

Таким чином, задача обчислення відносної ефективності простих і складних задач або програм зводиться до обчислення в множині моментів часу ступеня досягнення головної цілі за умови, що ступені реалізації програм $SD_q \in B \subseteq D$ задані вектором A_B .

Розглянемо спочатку метод оцінювання складної задачі або програми в заданий момент часу t . Задача формулюється в такий спосіб.

Задано: момент часу t з інтервалу $[0, \tau]$; орієнтований граф ієрархії цілей $H(G, V)$, де $G = \{g_s\}, s = (0, n)$ – множина вершин, кожна вершина g_s позначена функцією $A_s(t)$ ступеня досягнення цілі [1]; для кожної вершини g_s задана множина $G_s = \{G_{sz}\}$

множин сумісних вершин-однопопередників; $V\{v_q\}, q = (1, b)$ – множина дуг, кожна дуга має вагу (частковий коефіцієнт впливу [1]); вектор A_B , визначений виразом (1) у відповідності із значеннями в момент часу t випадкових процесів, що задають загрози й ризики.

Необхідно визначити значення функції $A_0(t)$ ступеня досягнення головної цілі за умови, що $\forall g_p \in B \subseteq D \subset G [A_q(t) = A_{Bq}(t)]$.

Визначення компонентів вектора B у момент часу t , які задають програми-моделі загроз і/або ризиків, здійснюється у відповідності із значеннями випадкових процесів, що описують ці фактори, аналогічно тому, як враховуються ймовірності реалізації інших програм або задач [3].

Визначимо метод обчислення ПВЕ для найбільш загального випадку, коли ієрархія мережева, нелінійна, немонотонна з позитивними й негативними зворотними зв'язками, має як лінійні, так і порогові цілі. Пошук методу побудови аналітичного виразу, який дозволяє обчислити ступінь досягнення головної цілі, здається безперспективним через складність аналітичного опису графа довільної структури. Це погіршується ще й тим, що при практичному застосуванні такого методу підтримки прийняття рішень виникає необхідність оцінювати ефективність програм і задач щодо різних цілей і оперативно змінювати структуру ієрархії при супроводі системи. Тому використовуємо метод рішення, який базується на моделюванні ієрархії цілей. Моделювання ієрархії здійснюється відповідно до такого алгоритму.

Крок 1. $\forall 0 \leq s \leq m [A_s(t_i)^0 = 0]$,

де $A_s(t_i)^x$ – значення функції $A_s(t_i)$ на x -й ітерації.

Крок 2. $\forall g_p \in B \subseteq D \subset G [A_q(t_i)^x = A_{Bq}(t)]$.

Крок 3. Знайти підмножину $G_u = \{g_s\}$ вершин графа, для яких $A_s(t_i)^x \neq A_s(t_i)^{x-1}$.

Крок 4. Знайти множину G_c вершин графа-однопопередника вершин $g_s \in G_u$.

Використовуючи [1], обчислити значення функцій $A_s(t_i)^x$ для $g_s \in G_c$.

Крок 5. Якщо $g_0 \in G_c$, тоді крок 6, інакше крок 7.

Крок 6. Якщо

$$|A_0(t_i)^x - A_0(t_i)^{x-1}| \leq \Delta, \quad (2)$$

де Δ – прийнятне значення похибки обчислень, тоді крок 8, інакше $x = x + 1$.

Крок 7. $G_u \in G_c$.

Крок 8. Кінець алгоритму.

Неважко помітити, що при такій процедурі обчислення ступеня досягнення головної цілі при повному виконанні задачі й програми d_j , повинні обчислюватися ступені досягнення підцілей $g_j \in G^*$:

$$G^* = \bigcup_j G_j; G_j = \bigcup_q G_{jq},$$

де G_{jq} – множина підцілей, які входять в q -й шлях у графі ієрархій підцілей, що веде з вершини, яку позначено задачею d_j у вершину g_0 , позначену головною ціллю ПВД.

Відзначимо, що в загальному випадку в ієрархіях мережевого типу $q > 1$, тобто може існувати множина таких шляхів. Це означає, що виконання однієї й тієї ж програми або задачі впливає на досягнення декількох підцілей. Досягнення деякої

підцілі, як правило, впливає на досягнення не однієї, а декількох надцілей. Це й породжує множину шляхів від однієї задачі або програми до головної цілі.

Наведений алгоритм виконується N раз, причому число повторень залежить від необхідної точності обчислень, після цього визначається математичне очікування значення ступеня досягнення головної цілі в момент часу t .

Наступний момент часу t_{i+1} встановлюється з наступних міркувань. Ступінь досягнення головної цілі в цей момент однозначно визначається ступенями досягнення всіх підцілей, що перебувають на шляхах від програм (задач), яким у векторі A_B відповідають одиниці, й миттєвими значеннями їх коефіцієнтів впливу в цей момент часу. Оскільки ступені досягнення всіх підцілей, обчислених на момент часу t_i , не змінюються на інтервалі $t_i - t_{i+1}$, тоді ступінь досягнення головної цілі може змінитися в момент часу t_{i+1} у порівнянні з моментом часу t_i , тільки якщо до початку t_{i+1} хоча б в одній підцілі коефіцієнт впливу замість нуля прийме стаціонарне значення. Тому t_{i+1} будемо визначати з виразу $t_{i+1} = \inf_{e_j \in T_i^0} (e_j)$, де $T_i^0 = (e_j \geq t_i)$ – множина значень системних моментів часу, не менших t_i , у яких в ієрархії відбуваються події (виконання програми або задачі, завершення поширення впливу досягнення підцілі).

При наявності зворотних зв'язків у мережі підцілей необхідно обчислювати ступінь досягнення головної цілі по нескінченній кількості ітерацій, які визначимо, виходячи із прийнятної точності результатів, тобто з умови

$$y = |\mu_a(u+1) - \mu_a(u)| \leq \Delta \ll 1, \quad (3)$$

де $\mu_a(u+1) - \mu_a(u)$ – значення показника ефективності простої програми d_a , обчислені на $u+1$ і u -их ітераціях відповідно;

Δ – прийнятне значення похибки обчислень.

Умова стійкості ітераційного процесу, тобто умови, при яких (3) виконується при кінцевому u , визначається [4, 5].

В режимі оцінювання відносної ефективності напрямків виконання ПБД із урахуванням загроз і ризиків компоненти вектора B , відповідні до програм і задач, які не є моделями загроз і індикаторами ризиків, визначаються способом, аналогічним описаному вище. Після цього визначають показники відносної ефективності кожної із цілей, що моделюють напрямки виконання ПБД, способом, описаним вище.

Оцінювання відносної ефективності заданої множини ризиків і загроз аналогічно розглянутому вище режиму оцінки множини програм (задач). Оцінювання здійснюється на підставі [1], оскільки модель загрози – програма (задача), а модель ризику – індикатор ризику, який теж є підціллю.

Оцінювання відносної ефективності засобів протидії ризикам і загрозам з урахуванням того, що є засоби протидії ризикам і загрозам – програми (задачі), здійснюється аналогічно розглянутому вище оцінюванню програм (задач).

Висновки

Розроблені й наведені етапи технології підтримки прийняття рішень з урахуванням загроз і ризиків, що базується на методі цільового динамічного оцінювання задач ПБД такі як: побудова ієрархії цілей ПБД; введення в неї моделей загроз і ризиків, і розв'язання на цій основі наступних задач оцінювання: відносної ефективності напрямків виконання ПБД із урахуванням загроз і ризиків, а також відносних ефективностей програм (задач), заданих множиною загроз і ризиків, а також

засобів протидії загрозам і ризикам. Ці задачі вирішуються за умови формування ПІБД на заданому інтервалі часу. Показано, що базою для них є задача оцінювання порівняльної ефективності заданої множини задач ПІБД. Наведено запропонований алгоритм розв'язання цієї задачі з урахуванням загроз і ризиків.

Дана технологія може застосовуватися для складних комплексних цільових програм різного призначення.

Список літератури

1. Зибін, С.В. Підтримка прийняття рішень при формуванні програм інформаційної безпеки держави / С.В. Зибін, В.О. Хорошко // Моделі загроз і ризиків. – 2014. – Ч.1. – С. 78-96.
2. Totsenko, V. One approach to the decision making support in R&D planning. Part 2. The method of goal dynamic estimating of alternatives // J of Automat and Inform. Sci. – 2001. – 33, #44. – P. 82 – 90.
3. Кини, Р.Л. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения. / Р.Л. Кини, Х. Райфа – М.: Радио и связь, 1981. – 560 с.
4. Тоценко, В.Г. Методы и системы поддержки принятия решений. Алгоритмический аспект / В.Г Тоценко. – К: Наукова думка, 2002. – 382 с.
5. Тарасов, В.А. Интеллектуальные системы поддержки принятия решений: Теория, синтез, эффективность. / В.А. Тарасов, Б.М. Герасимов, Н.А. Левин, В.А. Корнейчук – К: МАК НС, 2007. – 336 с.

ПОДДЕРЖКА ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ ПРИ ФОРМИРОВАНИИ ПРОГРАММ ИНФОРМАЦИОННОЙ БЕЗОПАСНОСТИ ГОСУДАРСТВА: ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ ПРОГРАММ

С.В. Зыбин, В.А. Хорошко

Национальный авиационный университет,
просп. Космонавта Комарова, 1, Киев, 03680, Украина; e-mail: professor_va@ukr.net

Предложен метод построения иерархии целей программ обеспечения информационной безопасности государства (ПИБГ) с учётом угроз и рисков. Описаны разработанные методы определения количественных показателей относительной эффективности с учётом угроз и рисков, направлений выполнения ПИБГ, задач ПИБГ, средств противодействия угрозам и рискам.

Ключевые слова: поддержка принятия решений, модели угроз и рисков, информационная безопасность, иерархия целей, целевая оценка.

SUPPORT ADOPTION DECISIONS IN THE FORMATIVE PROGRAMS INFORMATION SECURITY STATE: EVALUATION OF THE EFFECTIVENESS OF PROGRAMS

S.V. Zybin, V.O. Khoroshko

National aviation university
1, Kosmonavta Komarova Avenue, Kyiv, 03680, Ukraine; e-mail: professor_va@ukr.net

The construction method of goals hierarchy of programs that ensure information security of the state with a glance of threats and risks is offered. The worked out methods of quantity determination indexes of relative efficiency with a glance of threats and risks; executing direction of programs that ensure information security of the state, tasks of programs that ensure information security of the state, countermeasures to the threats and risks are described.

Keywords: decision support system, models of threats and risks, information security, goal hierarchy, goal estimate.

ВЫЯВЛЕНИЕ НАРУШЕНИЙ ЦЕЛОСТНОСТИ ЦИФРОВОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ ПУТЕМ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ СТЕГАНОГРАФИЧЕСКИХ АЛГОРИТМОВ

А.А. Кобозева, И.И. Бобок, Л.М. Дзюбинская

Одесский национальный политехнический университет,
просп. Шевченко 1, Одесса, 65044, Украина; e-mail: alla_kobozeva@ukr.net

В работе предлагается метод обнаружения нарушений целостности цифровых изображений, основанный на стеганопреобразовании оригинального изображения. В случае устойчивого к возмущающим воздействиям используемого стеганографического алгоритма обеспечивается возможность определения неоригинальной области в изображении даже при сохранении измененного изображения в формате с потерями. Разработанный метод дает возможность среди имеющихся различных способов нарушений целостности выделить конкретный – клонирование, выявить клонированную область и ее прообраз, отделить клон в случае отсутствия его постобработки от найденного оригинального прообраза, что не делалось ранее.

Ключевые слова: целостность цифрового изображения, стеганопреобразование, цифровой водяной знак, клонирование, прообраз клона

Введение

Современные информационные контенты все чаще имеют цифровое представление: цифровые изображения (ЦИ), видео (ЦВ), аудио. При их использовании с целью, отличной от развлекательной, необходимо быть уверенными в отсутствии несанкционированных изменений этих контентов, что делает задачу проверки их целостности чрезвычайно *актуальной* на сегодняшний день.

Современный уровень развития IT-технологий привел к тому, что различного рода фальсификации ЦИ средствами графических редакторов, таких как Adobe Photoshop, Corel Draw и другие, являются чрезвычайно распространенными, приводя к необходимости повышения эффективности методов пассивной защиты информации. И хотя задача выявления нарушений целостности ЦИ не является новой, существующие методы ее решения по тем или иным причинам не являются удовлетворительными [1-3].

Актуальной на сегодняшний день является задача выявления областей клонирования ЦИ. Ее удовлетворительное решение получено в случае сохранения измененного ЦИ в формате без потерь, например, в [4], но предложенный здесь метод оказывается неэффективным, если после осуществления клонирования ЦИ сохраняется в формате с потерями, что вносит дополнительные возмущения в изображение.

Часто при нахождении клонированной области и ее прообраза важным является точное установление «что есть что». Алгоритм отделения клона от прообраза совсем недавно был предложен в [5], однако основой этого алгоритма является выявление результатов постобработки клонированной области (ее контура) – размытия, без наличия которого предложенный алгоритм является нерабочим.

Цель статьи и постановка заданий

Стеганографические алгоритмы (СА), внедряющие цифровые водяные знаки (ЦВЗ) в цифровые контенты, широко используются в настоящее время для обеспечения проверки их аутентичности и целостности. В связи с этим

Целью работы является разработка метода выявления (областей) нарушений целостности ЦИ, основанного на использовании ЦВЗ, эффективного, в том числе, в условиях сохранения измененного ЦИ в формате с потерями, позволяющего при выявленном клонировании отделить клон от его прообраза в случае отсутствия какой-либо постобработки области клонирования.

Для достижения поставленной цели в работе решаются *задачи*:

- определения свойств стеганографического метода/алгоритма, используемого для погружения ЦВЗ в ЦИ, с учетом характеристик возможных атак на полученное стеганосообщение;
- определения алфавита для элементов ЦВЗ;
- определения способа выявления области клонирования в случае несовпадения сеток разбиения матрицы ЦИ для клона и области прообраза;
- отделения клона при отсутствии его постобработки от прообраза.

Основная часть

Рассматривается цветное ЦИ. Пусть F - это одна из матриц его формального представления (одна из цветовых матриц, если ЦИ хранится, например, в схеме RGB; матрица яркости в схеме YUV). Для обеспечения решения задачи контроля нарушений целостности ЦИ матрица F размера $n \times n$ разбивается стандартным образом на $l \times l$ -блоки, обозначаемые далее B_{ij} , $i, j = 1, \dots, [n/l]$, где $[\bullet]$ - операция выделения целой части аргумента. Каждый блок B_{ij} разбивается на квадратные $m \times m$ -подблоки B_{ij}^{gh} , где $g, h = 1, \dots, l/m$ (в предположении, что l кратно m) (рис.1). Для ЦИ генерируется случайным образом секретный ключ в виде двумерной $[n/l] \times [n/l]$ -матрицы K , с элементами k_{ij} , $i, j = 1, \dots, [n/l]$. Элементы $k_{ij} \in \{0, 1, 2, \dots, 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^r\}$, где r - количество $m \times m$ -подблоков блока B_{ij} . Ключ K играет роль ЦВЗ, погружаемого при помощи СА в оригинальное ЦИ (в матрицу F). Предложенное определение алфавита для элементов ЦВЗ даст возможность увеличить его чувствительность по сравнению с общеиспользуемым [6] бинарным представлением.

В каждый блок B_{ij} происходит погружение одного элемента K после его предварительного представления в двоичной системе счисления с использованием r разрядов (например, если очередное значение $k_{ij} = 2$, а $r = 4$, то k_{ij} кодируется в виде: 0010). Каждый подблок B_{ij}^{gh} используется для погружения в него одного бита двоичного представления k_{ij} . Такая блочная организация процесса стеганопреобразования (СП) ЦИ, помимо всего прочего, обеспечит разрабатываемый стеганометод наличием внутреннего параллелизма [7], что при его использовании позволит значительно сократить время работы метода при обработке изображения, по сравнению с его последовательной реализацией. Наличие внутреннего параллелизма обеспечит также возможность использования предлагаемого метода выявления нарушений целостности для ЦВ.

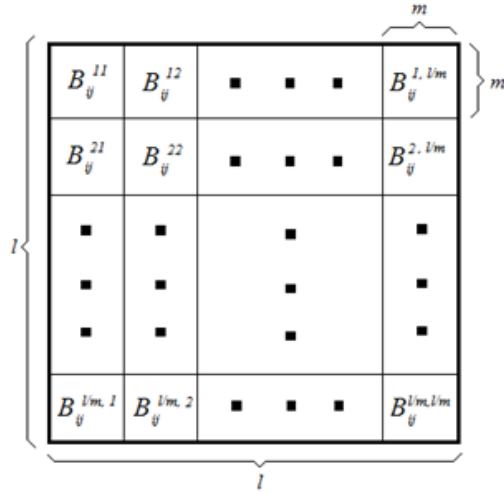


Рис. 1. Разбиение $l \times l$ –блока B_{ij} на $m \times m$ –подблоки B_{ij}^{gh}

Основные шаги метода следующие.

Организация стеганопреобразования.

1. Разбить матрицу ЦИ F на непересекающиеся $l \times l$ –блоки B_{ij} , $i, j = 1, \dots, [n/l]$.
2. Сформировать $[n/l] \times [n/l]$ –матрицу секретного ключа K , которая передается адресату по защищенному каналу связи.

3. Для каждого очередного блока B_{ij} , $i, j = 1, \dots, [n/l]$:

3.1. Разбить B_{ij} стандартным образом на r непересекающихся $m \times m$ –подблоков B_{ij}^{gh} , где $g, h = 1, \dots, l/m$.

3.2. Представить очередной погружаемый в B_{ij} элемент k_{ij} матрицы ключа K в виде: $p_1 p_2 \dots p_r$, где $p_i \in \{0, 1\}$, $i = \overline{1, r}$.

3.3. Для каждого подблока B_{ij}^{gh} , участвующего в процессе СП, погрузить в него очередной элемент $p_1 p_2 \dots p_r$, используя для этого некоторый СА, обеспечивающий надежность восприятия получаемого ЦИ-стеганосообщения с матрицей $F^{(S)}$.

Организация декодирования.

1. Разбить матрицу возможно измененного в процессе пересылки или хранения ЦИ \bar{F} (в общем случае $\bar{F} \neq F^{(S)}$) на непересекающиеся $l \times l$ –блоки \bar{B}_{ij} , $i, j = 1, \dots, [n/l]$. Каждый блок \bar{B}_{ij} используется для декодирования из него 1 возможно измененного элемента \bar{k}_{ij} матрицы ключа K .

2. Для каждого очередного блока \bar{B}_{ij} , $i, j = 1, \dots, [n/l]$, задействованного в СП:

2.1. Разбить \bar{B}_{ij} стандартным образом на r непересекающихся $m \times m$ –подблоков \bar{B}_{ij}^{gh} , где $g, h = 1, \dots, l/m$.

2.2. Из каждого подблока \bar{B}_{ij}^{gh} , участвующего в СП, извлечь очередной бит информации \bar{p}_s , используя для этого СА, который применялся на этапе погружения информации в ЦИ. Все извлеченные биты, выстроенные в порядке, определяемом секретным ключом алгоритма, определяют двоичное представление $\bar{p}_1 \bar{p}_2 \dots \bar{p}_r$ элемента \bar{k}_{ij} .

3. Если существует элемент матрицы K , для которого $\bar{k}_{ij} \neq k_{ij}$, то целостность ЦИ нарушена, а несовпадения в K дадут возможность локализовать эти области, иначе целостность ЦИ не нарушена, переход на шаг 8.

4. Если целью анализа ЦИ было выявление лишь факта нарушения его целостности, то переход на шаг 8, иначе для того, чтобы проверить, является ли выявленная область клонированной, необходимо найти ее же в анализируемом ЦИ, т.е. найти ее прообраз. Для этого необходимо в матрице \bar{K} , составленной из декодированных элементов \bar{k}_{ij} , найти область ее элементов, аналогичную выявленной неоригинальной. Если область найдена, переход на шаг 8.

Частный случай иллюстрации шага 4 представлен на рис.2. Однако такой случай, а именно, когда сетка разбиения клонированной области и ее прообраза на блоки будет совпадать, является маловероятным. Чаще всего даже в случае прямоугольной области клона будет иметь место случай, иллюстрация которого представлена на рис.3 (красным выделена область клона, зеленым цветом – прообраз), когда блоки (их количество и расположение) в пределах области клона не будут напрямую отвечать блокам прообраза. Тогда поиск прообраза в ЦИ будет затруднен, поскольку точного совпадения частей ключа для клона и прообраза в анализируемом ЦИ наблюдаться не будет. В этом случае процесс анализа ЦИ должен быть продолжен.

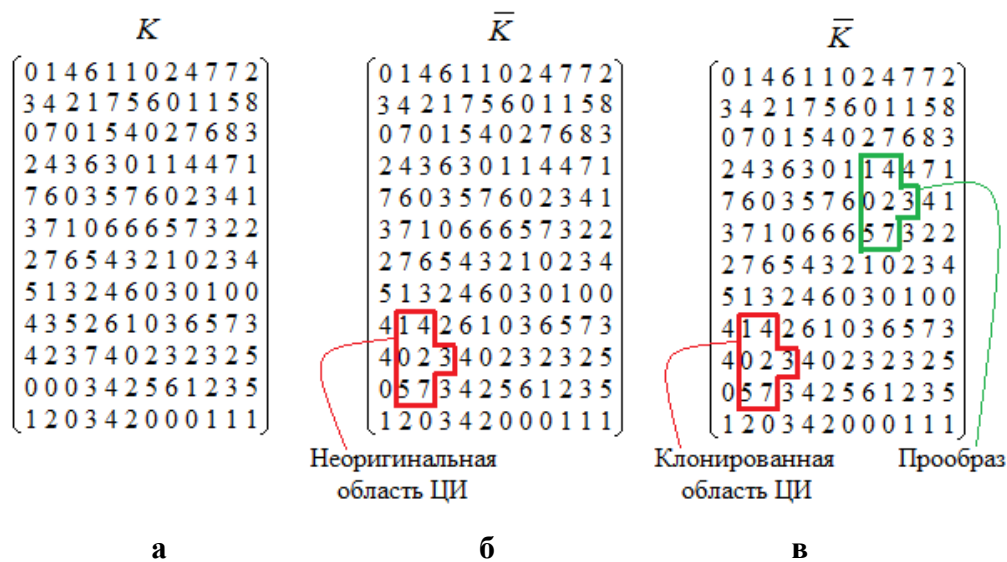


Рис. 2. Выявление клонированной области и ее прообраза в ЦИ на основании декодированной матрицы ключа

5. Выделенная неоригинальная область должна содержать некоторые блоки целиком. Из таких блоков произвести декодирование части ключа (рис.2(б)). С учетом того, что блоки, находящиеся на границе области, могут лишь частично входить в клонированную область, удалить из выделенной области ключа значения, лежащие на ее границе. Перейти на шаг 4. Если аналог неоригинальной части ЦИ найден, то он является прообразом выявленной неоригинальной части ЦИ - клона. Переход на шаг 8.

6. Перебор всех возможных расположений сетки разбиения в пределах выделенной неоригинальной области ЦИ. Произвести сдвиг сетки разбиения на 1 пиксель. Переход на шаг 5.

7. Если все возможные варианты сетки разбиения с шагом в один пиксель проверены, при этом прообраз неоригинальной области не обнаружен, то она не является клонированной областью.

8. Выход.



Рис. 3. Пример возможного несовпадения сеток разбиения области клонирования и прообраза: а – оригинальное ЦИ; б – ЦИ, подвергнутое обработке

Замечание. Для того, чтобы предлагаемый метод обеспечивал чувствительность к нарушению целостности, охватывающему ЦИ целиком (наложение шума, сжатие с потерями, фильтрация ЦИ), погружение элементов K на шаге 3.3 организации СП должно происходить неустойчивым к возмущающим воздействиям стеганоалгоритмом. Для организации выявления областей нарушений целостности, происходящих на ЦИ локально (области локально проведенных геометрических атак, в частности, клонирования), алгоритм погружения элементов K должен быть устойчивым к атакам против встроенного сообщения. В этом случае разработанный метод позволит отделять область клона от прообраза при имеющем место клонировании и в условиях отсутствия какой-либо постобработки области клона; кроме того с учетом предложенной организации СП, клонирование будет выявляться и в случае сохранения измененного ЦИ с потерями, что, как можно судить по источникам, доступным из открытой печати, не делалось ранее.

Выводы

Разработан метод обнаружения нарушений целостности цифровых изображений, основанный на СП оригинального изображения, который позволяет в зависимости от свойств используемого для погружения ЦВЗ стеганоалгоритма выявлять как результаты изменений ЦИ целиком (наложение шума, сжатие с потерями, фильтрация), так и области локальных нарушений целостности, в частности, области клонирования. В отличие от существующих аналогов, разработанный метод принципиально позволяет обнаруживать результаты клонирования в ЦИ, сохраненных в форматах с потерями, а также отделять клон от области прообраза в случае отсутствия какой-либо постобработки клона.

При разработке алгоритма, реализующего предложенный метод, для обеспечения его эффективной работы на основании представительных вычислительных экспериментов необходимо осуществить выбор размеров блока (l) и подблока (m), количества подблоков в границах блока, над чем сейчас работают авторы.

Список литературы

1. Rey, C. A survey of watermarking algorithms for image authentication / C. Rey, J.-L. Dugelay // EURASIP J. Appl. Signal Process. – 2002. — №1. — С.613–621.
2. Amerini, I. Copy-move forgery detection and localization by means of robust clustering with J-linkage / I. Amerini, L. Ballan, R. Caldelli, A. del Bimbo, L. del Tongo, G. Serra // Signal Processing. — 2013. — Т.28. — №6. — С.659–669.
3. Farid, H. Image Forgery Detection / H. Farid // IEEE Signal processing magazine. – 2009. — С.16-25.
4. Кобозева, А.А. Разработка нового подхода к выявлению замещающей области в цифровом изображении / А.А.Кобозева, Е.Ю.Лебедева // Правове, нормативне та метрологічне забезпечення системи захисту інформації в Україні. – 2013. – Вип 1(25). – С.67-74.
5. Лебедева, Е.Ю. Метод локализации и идентификации оригинальной и клонированной областей изображения / Е.Ю. Лебедева // Информатика та математичні методи в моделюванні. 2014. Том 4, №1. С. 76 – 84.
6. Аграновский, А.В. Стеганография, цифровые водяные знаки и стеганоанализ: [монография] / А.В. Аграновский, А.В. Балакин, В.Г. Грибунин, С.А. Сапожников. — М.: Вузовская книга, 2009. — 220 с.
7. Воеводин, В.В. Параллельные вычисления / В.В.Воеводин, Вл.В.Воеводин. — СПб.: БХВ-Петербург, 2002. — 608 с.

ВИЯВЛЕННЯ ПОРУШЕНЬ ЦІЛІСНОСТІ ЦИФРОВОГО ЗОБРАЖЕННЯ ШЛЯХОМ ВИКОРИСТАННЯ СТЕГАНОГРАФІЧНИХ АЛГОРИТМІВ

А.А.Кобозева, І.І. Бобок, Л.М. Дзюбинська

Одеський національний політехнічний університет,
просп. Шевченко 1, Одеса, 65044, Україна; e-mail: alla_kobozeva@ukr.net

У роботі пропонується метод виявлення порушень цілісності цифрових зображень, заснований на стеганоперетворенні оригінального зображення. У випадку стійкого до збурних дій використовуваного стеганографічного алгоритму забезпечується можливість визначення неоригінальної області в зображенні навіть при збереженні зміненого зображення у форматі з втратами. Розроблений метод дає можливість серед наявних різних способів порушень цілісності виділити конкретний - клонування; виявити клоновану область і її прообраз; відокремити клон у випадку відсутності його постобробки від знайденого оригінального прообразу, що не робилося раніше.

Ключові слова: цілісність цифрового зображення, стеганоперетворення, цифровий водяний знак, клонування, прообраз клону

IDENTIFYING THE UNAUTHORIZED CHANGES OF IMAGES AREAS THAT EXPOSED TO STEGANOGRAPHY ALGORITHM

A. Kobozeva, I. Bobok, L. Dzubinskaya

Odessa national polytechnic university,
1 Shevchenko Ave., Odessa, 65044, Ukraine; e-mail: alla_kobozeva@ukr.net

In this paper we propose a method for identifying the changes of image completion based on stegano transformation of original image. In the case of using the steganography algorithm that resistant for disturbing influences proposed method provides the possibility of identifying non-original areas of the image, even when image was saved in lossy formats. The developed method allows to allocate a specific method of image completion violations - cloning; identify the cloned area and its prototype; separate clone in the case of absence of post-processing from the original image that has not been done before.

Keywords: image completion, stegano transformation, watermarking, clone stamp, prototype of clone

ІДЕНТИФІКАЦІЯ ДОБОВОЇ ДИНАМІКИ ГЛЮКОЗИ В КРОВІ

Ю.М. Чайківська¹, Р.М. Пасічник²

¹Тернопільський національний педагогічний університет ім. В. Гнатюка,
вул. Винниченка, 10, Тернопіль, 46000, Україна, e-mail: u_chaika@yahoo.com

²Тернопільський національний економічний університет,
вул. Львівська, 11, Тернопіль, 46000, Україна

Розглядається проблема контролю концентрації глюкози в крові із мінімізацією застосування інвазивних вимірювань. Розроблено математичну модель розподілу поступлення глюкози, що залежить від обсягу спожитих вуглеводів (миттєві, швидкі, повільні). Математичну модель побудовано для довготривалих спостережень із використанням спеціально-організованих експериментів. Рівень глюкози в крові залежить від інтенсивності дії гормону інсуліну, тому побудовано модель динаміки інсуліну. Сукупний інсулін представлено як поєднання інсуліну, що виробляється організмом та інсуліну, що поступає з ін'єкцій. Для ідентифікації динаміки глюкози в крові використано метод Левенберга-Маквардта. Ідентифікація добової динаміки глюкози в крові є складною і містить ряд допоміжних задач.

Ключові слова: неавтономна модель, динаміка глюкози, цукровий діабет, ідентифікація, модель розподілу.

Постановка проблеми

У людському організмі за стабілізацію рівня глюкози в крові відповідає підшлункова залоза, яка виробляє гормони інсулін та глюкагон, що дозволяють збільшити або зменшити концентрацію глюкози. Проте у хворих на цукровий діабет спостерігається порушення функцій підшлункової залози в поєднанні із заниженою чутливістю до інсуліну. Це призводить до коливання глюкози в крові, зокрема до появи як гіперглікемії (високої концентрації глюкози), так і гіпоглікемії (низької концентрації).

Контроль вмісту глюкози в крові є важливим при аналізі стану хворих на цукровий діабет. Одним із важливих факторів, що впливають на рівень глюкози є прийом їжі. Емпіричний підбір такого режиму містить ризики перевищення граничних максимальних або мінімальних рівнів концентрації глюкози. Ці ризики можна значно зменшити із використанням математичної моделі рівня глюкози в крові, яка враховує індивідуальні особливості. Однак розроблені математичні моделі є феноменологічними і не передбачають ідентифікації за результатами спостережень за конкретним пацієнтом.

Таким чином, ідентифікація добової динаміки глюкози в крові для певного організму складає актуальну проблему.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Більшість плазмових моделей динаміки глюкози в крові будуються на основі даних внутрішнього тесту толерантності до глюкози (ВТТГ), зокрема, таким чином побудовані моделі Бергмана, Роя, Кобелі, Говорки та ін. [1-5]. Суть даного тесту

полягає в тому, що людині натще одноразово внутрівнено вводять глюкозу і через регулярні проміжки часу аналізують її динаміку в крові. Здебільшого тест триває три години і через кожні 10 хвилин здійснюють контроль глюкози. Проба на толерантність до глюкози у хворого на цукровий діабет покаже підвищений рівень глюкози, а показником нормальної толерантності є повернення до вихідного рівня глюкози в крові протягом вищезазначеного часу. Окрім цукрового діабету, показники толерантності до глюкози можуть бути понижені при порушеннях функцій печінки, а також інфекційних захворюваннях, ожирінні та дії лікарських препаратів [6]. Такі моделі не можуть описати поведінку глюкози протягом доби, оскільки людина харчується впродовж дня. Крім того пероральний шлях надходження глюкози є складнішою задачею для моделювання її динаміки, оскільки необхідно враховувати процеси її засвоєння.

Модель Бретона [7] дозволяє оцінити динаміку глюкози в крові під дією фізичних навантажень. Вона враховує лише одноразові поступлення глюкози. Останнім часом інтенсивно проводиться управління концентрацією глюкози за допомогою інсулінової помпи [8-10]. Проте, інсулінова помпа має ряд недоліків: часте її використання знижує функцію вироблення гормонів підшлунковою залозою, що призводить до її непрацездатності; при виникненні збоїв у роботі пристрою, хворий може опинитися під загрозою, оскільки не буде введено потрібної дози інсуліну і це може призвести до тяжких ускладнень. Тому важливими залишаються питання самоконтролю глюкози в крові із врахуванням режиму харчування.

Формування цілей

Поступлення глюкози ззовні відіграє важливу роль при здійсненні контролю глюкози в крові у хворих на цукровий діабет. Зосередження уваги на кількісній оцінці надходження глюкози з їжею та особливості її засвоєння мають очевидну важливість, оскільки цей процес відбувається кожного дня. За допомогою математичних моделей можна провести чисельний експеримент концентрації глюкози в крові, яка залежить від обсягу та складу харчування протягом активної доби. Ідентифікація добової динаміки глюкози містить коефіцієнти управління, час сну, споживання їжі, декілька ін'єкцій. Це вимагає спеціальної процедури ідентифікації, яка дозволить адаптувати побудовану модель до особливостей конкретного організму.

Основна частина

Основною метою лікування цукрового діабету є підтримання рівня глюкози в крові найбільш близьким до нормального. На жаль, людина практично не здатна відчувати перепади рівня глюкози від 4 до 10 ммоль/л [11]. Саме в цьому і полягає підступність цукрового діабету, оскільки високий рівень глюкози в крові неминуче веде до розвитку ускладнень (надмірна маса тіла, артеріальна гіпертензія, значна частота серцево-судинних захворювань, порушення ліпідного обміну, інсульт, інфаркт, діабетична ретинопатія). Тільки регулярний і частий самоконтроль глюкози в крові дозволить уникнути погіршення стану хворого.

В такому випадку доцільно розробити математичну модель, яка дозволить оцінити загальний обсяг глюкози, який поступає в залежності від обсягу та складу харчування протягом доби.

В якості прототипу концепції взята модель Бретона [5]:

$$\dot{G}(t) = -p_1 * (dG(t) - X(t) * G(t) - \beta * Y(t) * G(t) + G_M(t)), \quad (1)$$

$$\dot{X}(t) = -p_2 * X(t) + S_i * p_2 (\gamma(t) * G(t) - I_b), \quad (2)$$

$$\dot{Y}(t) = -\frac{1}{\tau_{HR}} Y(t) + \frac{1}{\tau_{HR}} dH. \quad (3)$$

В цій моделі перше рівняння описує динаміку глюкози в крові, де $dG(t)$ – різниця рівня в плазмі крові від початкового значення глюкози G_b , p_1 – константа, що дозволяє оцінити поглинання інсуліну, $X(t)$ – віддалений інсулін, $G(t)$ – концентрація глюкози в плазмі, β – зміна, що відображає короткі зміни серцевого ритму внаслідок фізичної активності, $Y(t)$ – показує зміни серцевого ритму, $G_M(t)$ – розподіл харчування протягом доби.

Друге рівняння даної моделі описує зміну інсуліну, де p_2 – константа, що характеризує поведінку інсуліну та його активність, S_i – константа, що описує чутливість до інсуліну, $\gamma(t)$ – інтенсивність виробництва інсуліну, I_b – початковий рівень інсуліну.

Третє рівняння даної моделі відображає диференціальну фільтрацію частоти серцевих скорочень, що імітує збільшення витрат енергії під час фізичних навантажень, де dH – зміна серцевого ритму, τ_{HR} – витрата енергії і реакції частоти серцевих скорочень до збільшення витрати енергії.

На початковому етапі формування моделі з метою спрощення виключимо вплив фізичних навантажень та з метою врахування лише спостережуваних величин виключимо вплив внутрім'язового інсуліну на концентрацію глюкози. При цьому рівняння (2) та (3) виключаються, а з першого диференціального рівняння усунемо компоненти, які включають віддалений інсулін $X(t)$ та пульс $Y(t)$. Враховуємо також, що в домашніх умовах оцінити поступлення глюкози із їжі в систему травлення важко. Вона оцінюватиметься засобами математичного моделювання на основі її впливу на концентрацію глюкози в крові. Це робить зайвим зважуванням її величини в моделі. Тому модель спроститься до вигляду

$$\frac{d}{dt} G(t) = G_M(t) - p_1(G(t) - G_b) \quad (4)$$

Спостереження за динамікою глюкози в крові та дозуванням глюкози при споживанні їжі виявляє невідповідність обсягу спожитої глюкози та її концентрації в крові. Це змусило висловити гіпотезу про врахування типу спожитої глюкози на концентрацію глюкози в крові. Оскільки прийнято розділяти вуглеводи на миттеві, швидкі та повільні, то відповідним чином диференціюємо змінні, що представляють обсяг поступлень глюкози із їжею: $G_{M1}(t)$ – обсяг поступлень глюкози із миттевими вуглеводами, $G_{M2}(t)$ – обсяг поступлень глюкози із швидкими вуглеводами; $G_{M3}(t)$ – обсяг поступлень глюкози із повільними вуглеводами. Це приводить до модифікації диференціального рівняння (4). В підсумку отримуємо наступну модель динаміки глюкози протягом доби

$$\frac{d}{dt} G(t) = G_{M1}(t) + G_{M2}(t) + G_{M3}(t) - p_1(G(t) - G_b) \quad (5)$$

Однак така модель не виділяє впливу гормону інсуліну на засвоєння глюкози. Для хворих на діабет концентрація інсуліну має першочергове значення. Внаслідок нестачі інсуліну в організмі виникають порушення всіх видів обміну речовин. Тому її необхідно включати в модель, враховуючи, що інтенсивність дії гормону не є постійною, а при досягненні певного бар'єру суттєво знижується. Сукупний інсулін, що присутній в організмі хворого, представимо як поєднання інсуліну $i(t)$, який виробляється організмом, та інсуліну $N(t)$, який поступає з ін'єкцій. Враховуємо також, що у зв'язку із складністю вимірювань концентрації інсуліну в крові, вона оцінюватиметься засобами математичного моделювання на основі її впливу на концентрацію глюкози в крові. При цьому рівняння (5) трансформується наступним чином:

$$\frac{d}{dt}G(t) = G_{M1}(t) + G_{M2}(t) + G_{M3}(t) - p_1(G(t) - G_b) - \frac{N(t)G(t)}{p_2 + G(t)} - \frac{i(t)G(t)}{p_2 + G(t)}. \quad (6)$$

Динаміку інсуліну, який виробляється організмом представляємо за допомогою диференціального рівняння, що враховує його виробництво під впливом перевищення глюкозою базового рівня та розпад інсуліну із певною інтенсивністю, при перевищенні ним свого базового рівня

$$\frac{di(t)}{dt} = p_3(G(t) - G_b)^+ - p_4(i(t) - i_b). \quad (7)$$

Отримана модель містить деякі розподілені в часі величини, які важко спостерігати. Це стосується поступлення спожитої глюкози в організм а також поступлень інсуліну, введеного в організм за допомогою ін'єкцій. У нас є 4 невідомих коефіцієнта, 4 елемента управління, а також параметр інсуліну, який ми не можемо напряму поміряти. Їхня дія проявляється в сукупності, тому важко таку задачу ідентифікувати. Для її ідентифікації будуємо ряд допоміжних задач.

Задача 1. Розглядаємо динаміку інсуліну в крові після припинення дії останньої ін'єкції в нічний час. При цьому вплив харчування та інсуліну з ін'єкцій виключаються. Система рівнянь (6)-(7) набуває наступного вигляду

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}G(t) = -p_1(G(t) - G_b) - \frac{i(t)G(t)}{p_2 + G(t)}, \\ \frac{di(t)}{dt} = p_3(G(t) - G_b)^+ - p_4(i(t) - i_b). \end{cases}$$

Задача 2. Розглядаємо динаміку глюкози в крові після харчування виключно вуглеводами певного типу із одночасною ін'єкцією інсуліну:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}G(t) = G_{M1}(t) + G_{M2}(t) + G_{M3}(t) - p_1(G(t) - G_b) - \frac{N(t)G(t)}{p_2 + G(t)} - \frac{i(t)G(t)}{p_2 + G(t)}, \\ \frac{di(t)}{dt} = p_3(G(t) - G_b)^+ - p_4(i(t) - i_b). \end{cases}$$

Проблема побудови розподілів спожитої глюкози та введеного інсуліну виникає внаслідок того, що відносно легко встановлюються обсяги спожитих вуглеводів та інсуліну, однак ці фактори не діють миттєво. Розподіл вказаних факторів можна

синтезувати на основі розподілів рівнів глюкози та інсуліну після разової ін'єкції глюкози [3].

Комплексна задача 3. Для перевірки адекватності ідентифікації в задачах (1)-(2) необхідно підвищити точність представлення розподілу вуглеводів із використанням спеціально-організованих експериментів. Аналіз результатів таких експериментів показав необхідність застосування кусково-кубічних многочленів Ерміта $H(t, \vec{T}, \vec{W})$, які мінімізують коливання функції між вузлами інтерполяції, тут (\vec{T}, \vec{W}) — деяка сукупність часових вузлів та відповідних значень інтерпольованої функції.

$$G_{m,i}^H(\tau, t) = G_{m,i,\tau}^* g_{m,i}(\tau, t)$$

$$g_{m,i}(\tau, t) = H_{m,i}(\tau - t, \vec{T}_i, \vec{W}_i)$$

де $G_{m,i,\tau}^*$ — обсяг спожитої глюкози у вуглеводах i -го виду в момент часу τ , який обчислюється за допомогою калькулятора калорійності;

$g_{m,i}(\tau, t)$ — динаміка поступлення глюкози в момент часу t , яка була спожита із вуглеводами i -го виду в момент часу τ .

Параметри многочленів Ерміта встановлюються на основі інтерполяції експериментальних спостережень рівнів глюкози після споживання вуглеводів i -го виду.

Для дослідження ефективності запропонованих моделей проводилися спостереження за хворим на цукровий діабет протягом доби.

В побутових умовах ми не спостерігаємо динаміку інсуліну. Однак коефіцієнт розпаду інтенсивності глюкози у порівнянні з дією інсуліну набагато нижчий. Для хворих 2-го типу дія інсуліну з ін'єкцій набагато інтенсивніша, ніж дія природного інсуліну. Інсулін є пропорційний надлишку з глюкози, тому його динаміка буде пропорційна динаміці глюкози в крові, коли вона не спотворена харчуванням. Таким чином розподіл інсуліну буде визначатися, як розподіл глюкози в крові:

$$N(\tau, t) = N_{\tau}^* H_N(\tau - t, \vec{T}_N, \vec{W}_N).$$

Зменшення концентрації глюкози в крові відповідає зменшенню концентрації інсуліну, що поступив з ін'єкцій. Тому коефіцієнти многочлена H_N визначаємо із задачі інтерполяції значень глюкози після останнього харчування, що поєднується з ін'єкцією інсуліну.

Проведемо ідентифікацію моделі протягом спостережуваної доби. На основі проведеної ідентифікації можна прогнозувати динаміку глюкози у хворих на цукровий діабет. На рис.1 зображено графік ідентифікації моделі протягом доби.

Висновки

Вперше запропоновано моделі розподілу динаміки глюкози в процесі споживання їжі, що залежить від обсягу спожитих вуглеводів (миттєвих, швидких, повільних). Моделі базуються на даних довготривалих спостережень. Більшість зарубіжних науковців використовують короткотермінові моделі, зокрема, Бергман, Кобелі, Говорка, Д. Рой використовують одноразове введення глюкози і протягом трьох годин спостерігають її динаміку. Проте важко зробити прогноз рівня глюкози в крові внаслідок таких спостережень, оскільки пероральний шлях надходження глюкози є

складнішою задачею для моделювання її динаміки, необхідно враховувати часте її надходження та процеси засвоєння. На основі моделі Бретона запропоновано модель розподілу поступлення глюкози у кров в ході заданого процесу. Для тривалих періодів точність розподілу вуглеводів представлено із використанням спеціально-організованих експериментів.

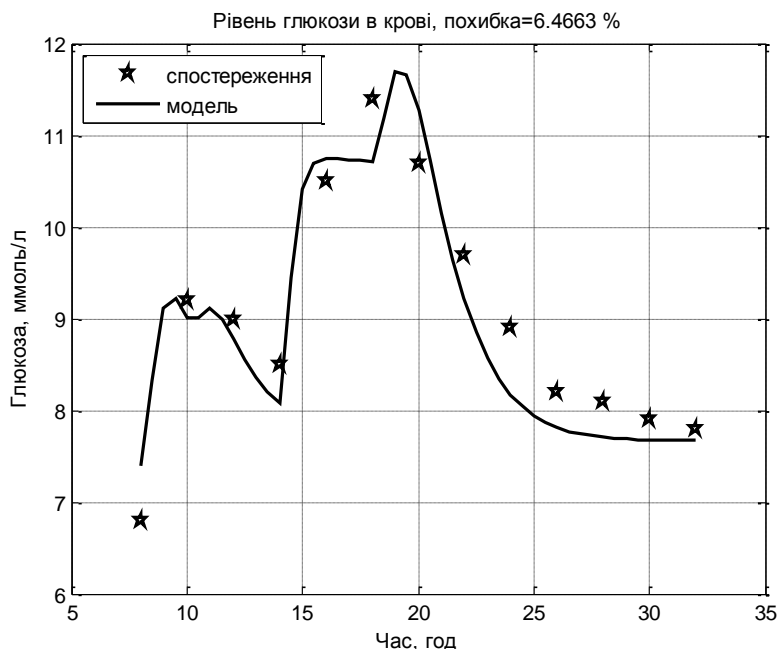


Рис. 1. Ідентифікація моделі (6) протягом доби

Похибка ідентифікації згідно моделі (6) становить — 6,4663%.

Динаміка глюкози також залежить від динаміки інсуліну, тому її необхідно включати в модель. Інтенсивність дії гормону інсуліну в крові оцінювалася засобами математичного моделювання на основі його впливу на концентрацію глюкози в крові. Сукупний інсулін представлено як поєднання інсуліну, що виробляється організмом, та інсуліну, який поступає з ін'єкцій.

Для ідентифікації запропонованих моделей використано метод Левенберга — Маквардта. На основі експериментальних даних протягом певної доби проведено ідентифікацію моделі із похибкою, що становила 6,4663%.

REFERENCES

1. Cobelli, C. GIM simulation software of meal glucose–insulin model / C. Cobelli, et al. // *Journal of Diabetes Science and Technology*. — 2009. — №3 (1). — PP. 44-55.
2. Callegari, T. Bayesian two-compartment and classic single-compartmentminimal models: Comparison on insulin modified IVGTT and effect of experiment reduction / T. Callegari, et al. // *IEEE Trans. Biomed. Eng.* — 2003. — 50(12). — PP. 1301–1309.
3. Breton, M. Silico preclinical trials: a proof of concept in closed-loop control of type 1 diabetes / M. Breton, et al. // *2006 IEEE EMBS Conference, New York.*—2006. — PP. 5647-5650.
4. Hovorka, R. Evaluation of glucose controllers in virtual environment: methodology and sample application / R. Hovorka, M.E. Wilinska, L.J. Chassin // *Artificial Intelligence in Medicine*. — 2004. — №32 (3). — PP. 171-181.
5. Roy, D. Short term glucose homeostasis in man: A system dynamic model / D. Roy, et al. // *Trans. Amer.Soc. Mech. Eng. (ASME)*. — 2010. — PP. 308–314.
6. Bergman, P.J. A Comparison Between the Minimal Model and the Glucose Clamp in the Assessment of Insulin Sensitivity Across the Spectrum of Glucose Tolerance / P.J. Bergman, et al.

- // Diabetes. — 2004. — №43. — PP. 1114-1121.
7. Breton, M.D. Physical activity--the major unaccounted impediment to closed loop control / M.D. Breton // Diabetes Sci Technol. — 2008. — №2(1). — PP. 169-174.
 8. Renard, E. Closed-loop insulin delivery using a subcutaneous glucose sensor and intraperitoneal insulin delivery / E. Renard, et al. // Diabetes Care. — 2010. — 33(1). — PP. 121-127.
 9. El-Khatib, F.H. Adaptive closed-loop control provides blood-glucose regulation using dual subcutaneous insulin and glucagon infusion in diabetic swine / F.H. El-Khatib, et al. // Journal of Diabetes Science and Technology. — 2007. — №1(2). — PP. 181-192.
 10. Швець, О.В. Дієта при цукровому діабеті. / О.В. Швець // Міжнародний ендокринологічний журнал. — 2013. — 2(50). — С. 65-74.
 11. Чайківська, Ю.М. Математична модель динаміки глюкози в процесі засвоєння їжі / Ю. М. Чайківська, Р.М. Пасічник // Збірник наукових праць «Інформатика та математичні методи в моделюванні». — 2014.— Т.4, №3. — С. 272-277.

ИНДЕТИФИКАЦИЯ СУТОЧНОЙ ДИНАМИКИ ГЛЮКОЗЫ В КРОВИ

Ю.М. Чайковская¹, Р.М. Пасечник²

¹Тернопільський національний педагогічний університет ім. В. Гнатюка,
ул. Винниченко, 10, Тернопіль, 46000, Україна, e-mail: u_chaika@yahoo.com

²Тернопільський національний економічний університет,
ул. Львівська, 11, Тернопіль, 46000, Україна

В данной статье рассматривается проблема контроля концентрации глюкозы в крови с минимизацией применения инвазивных измерений. Разработана математическая модель распределения поступления глюкозы, зависит от объема потребленных углеводов (мгновенные, быстрые, медленные). Математическую модель построена для длительных наблюдений с использованием специально - организованных экспериментов. Уровень глюкозы в крови зависит от интенсивности действия гормона инсулина, поэтому построена модель динамики инсулина. Совокупный инсулин представлено как сочетание инсулина, вырабатываемого организмом и инсулина, поступающей из инъекций. Для идентификации динамики глюкозы в крови использован метод Левенберг - Маквардта. Идентификация суточной динамики глюкозы в крови является сложной и содержит ряд вспомогательных задач.

Ключевые слова: неавтономная модель, динамика глюкозы, сахарный диабет, идентификация, модель распределения.

IDENTIFICATION DAILY DYNAMICS OF BLOOD GLUCOSE

YU.M. Chaikovsky¹, R.M. Pasichnyk²

¹Ternopilsky National Pedagogical University. V. Hnatiuk,
st. Vinnichenko, 10, Ternopil, 46000, Ukraine, e-mail: u_chaika@yahoo.com

²Ternopilsky National Economic University,
st. Lviv, 11, Ternopil, 46000, Ukraine

In this article the problem of control of blood glucose concentration of minimizing the use of invasive measurements. The mathematical model of the distribution of admission glucose depends on the amount consumed carbohydrates (instant, fast, slow). Mathematical models built for long-term observations using specially- organized experiments. The level of glucose in the blood depends on the intensity of the action of the hormone insulin, so the model of the dynamics of insulin. Total insulin presented as a combination of insulin and insulin produced by the body that comes with injections. To identify the dynamics of blood glucose method used Levenberg - Makvardta. Identification daily dynamics of blood glucose is complex and includes a number of auxiliary tasks.

Keywords: nonautonomous model, the dynamics of glucose, diabetes, identification, distribution model.

ПОСТРОЕНИЕ АППРОКСИМАЦИОННОЙ МОДЕЛИ ВОЛЬТЕРРА НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С ПОМОЩЬЮ ПОЛИИМПУЛЬСНЫХ ТЕСТОВЫХ СИГНАЛОВ

М. М. Масри, С. В. Павленко, В. Д. Павленко

Одесский национальный политехнический университет,
просп. Шевченко, 1, Одесса, 65044, e-mail: pavlenko_vitalij@mail.ru

Приведено теоретическое обоснование метода идентификации нелинейной динамической системы на основе аппроксимационной модели Вольтерра при использовании тестовых полиимпульсных сигналов с учетом погрешностей измерений откликов. Для обеспечения вычислительной устойчивости метода идентификации применяется метод регуляризации и процедуры шумоподавления, основанный на вейвлет-преобразовании. Исследуется эффективность вычислительных алгоритмов, реализующих метод идентификации.

Ключевые слова: нелинейные динамические системы, идентификация, модель Вольтерра, ядра Вольтерра, аппроксимационная модель, метод наименьших квадратов, регуляризация, вейвлет-преобразования, полиимпульсные тестовые сигналы.

Введение

Методы математического моделирования и эксперимент являются основными средствами исследования сложных нелинейных динамических систем (НДС). Для описания НДС часто используется аппарат интегростепенных рядов Вольтерра [1, 2]. При этом нелинейные и динамические свойства системы полностью характеризуются последовательностью многомерных весовых функций — ядер Вольтерра. Задача идентификации (построения модели) в виде ряда Вольтерра заключается в определении многомерных весовых функций на основе экспериментальных данных «вход–выход» НДС.

Идентификация по своей сути относится к обратным задачам, при решении которых возникают трудности вычислительного плана, обусловленные некорректностью постановки задачи. Получаемые решения оказываются неустойчивыми к погрешностям исходных данных — измерений откликов идентифицируемой НДС [3, 4]. При использовании моделей Вольтерра требуется также решить задачу разделения отклика $y(t)$ исследуемой НДС на парциальные составляющие (ПС) $y_n(t)$, соответствующие отдельным членам ряда Вольтерра, поскольку измеряется суммарный отклик $y(t)$ на тестовый сигнал $x(t)$ [5]. Поэтому необходимо применять специальные приёмы выделения ПС из отклика НДС.

В [6] рассматривается способ такой декомпозиции при построении аппроксимационной модели Вольтерра, основанный на использовании тестовых детерминированных сигналов с различными амплитудами и применении метода наименьших квадратов (МНК) для обработки экспериментальных данных. Однако, реализация метода идентификации НДС с использованием в качестве тестовых полиимпульсных сигналов приводит к большим ошибкам в получаемых оценках

диагональных и параллельных им сечений многомерных весовых функций, что обусловлено погрешностями измерений откликов. Поэтому для повышения устойчивости вычислительных алгоритмов на основе данного метода идентификации целесообразно применить процедуру регуляризации некорректных задач по А.Н.Тихонову [7, 8].

Целью работы является теоретическое обоснование метода идентификации НДС на основе аппроксимационной модели Вольтерра при использовании тестовых полиимпульсных сигналов; разработка вычислительных алгоритмов, реализующих метод идентификации с учетом погрешностей измерений откликов; повышение вычислительной устойчивости алгоритмов с помощью метода регуляризации и применения процедуры шумоподавления, основанной на вейвлет–преобразовании.

Метод идентификации

Метод идентификации НДС на основе рядов Вольтерра во временной области основывается на аппроксимации отклика НДС $y(t)$ (t — текущее время) на произвольный детерминированный сигнал $x(t)$ в виде интегростепенного полинома N -го порядка (N — порядок аппроксимационной модели):

$$\hat{y}_N(t) = \sum_{n=1}^N \hat{y}_n(t) = \sum_{n=1}^N \int_0^t \dots \int_0^t \hat{w}_n(\tau_1, \dots, \tau_n) \prod_{i=1}^n x(t - \tau_i) d\tau_i,$$

где $\hat{w}_n(\tau_1, \dots, \tau_n)$ — весовая функция (ядро Вольтерра) n -го порядка в аппроксимационной модели; $\hat{y}_N(t)$ и $\hat{y}_n(t)$ — отклик аппроксимационной модели и его частичная составляющая n -го порядка, соответственно.

Пусть на вход НДС поочередно подаются тестовые сигналы $a_1x(t)$, $a_2x(t)$, ..., $a_Lx(t)$; a_1, a_2, \dots, a_L — различные вещественные числа, удовлетворяющие условию $0 < |a_j| \leq 1$ для $\forall j=1, 2, \dots, L$, тогда

$$\hat{y}_N[a_jx(t)] = \sum_{n=1}^N \hat{y}_n[a_jx(t)] = \sum_{n=1}^N a_j^n \int_0^t \dots \int_0^t \hat{w}_n(\tau_1, \dots, \tau_n) \prod_{i=1}^n x(t - \tau_i) d\tau_i = \sum_{n=1}^N a_j^n \hat{y}_n(t).$$

ПС в аппроксимационной модели $\hat{y}_n(t)$ находятся с помощью МНК, который позволяет получить такие их оценки при которых сумма квадратов отклонений откликов модели $\hat{y}_N[a_jx(t)]$ от откликов идентифицируемой НДС $y[a_jx(t)]$ минимальна, т.е. обеспечивает минимум среднеквадратичного критерия

$$J_N = \sum_{j=1}^L (y[a_jx(t)] - \hat{y}_N[a_jx(t)])^2 = \sum_{j=1}^L [y_j(t) - \sum_{n=1}^N a_j^n \hat{y}_n(t)]^2 \rightarrow \min, \quad (1)$$

где $y_j(t) = y[a_jx(t)]$. Минимизация критерия (1) сводится к решению системы нормальных уравнений Гаусса, которую в векторно-матричной форме можно записать в виде

$$A'A\hat{y} = A'y, \quad (2)$$

где

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^N \\ a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^N \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_L & a_L^2 & \cdots & a_L^N \end{bmatrix}, \quad \hat{y} = \begin{bmatrix} \hat{y}_1(t) \\ \hat{y}_2(t) \\ \cdots \\ \hat{y}_N(t) \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \cdots \\ y_L(t) \end{bmatrix}.$$

Из (2), получим

$$\hat{y} = (A'A)^{-1} A'y. \quad (3)$$

Применение тестовых полиимпульсных сигналов

Если тестовый сигнал $x(t)$ представляет собой единичный импульс (функцию Дирака) с весом s , то решением СЛАУ (3) являются весовая функция 1-го порядка $\hat{w}_1(t)$ и диагональные сечения весовых функций n -го порядка $\hat{w}_n(t, \dots, t)$, $n = \overline{2, N}$. Поскольку при $x(t) = s\delta(t)$

$$\hat{y}_n(t) = \int_0^t \dots \int_0^t \hat{w}_n(\tau_1, \dots, \tau_n) \prod_{i=1}^n s\delta(t - \tau_i) d\tau_i = s^n \hat{w}_n(t, \dots, t),$$

то

$$\hat{w}_n(t, \dots, t) = \frac{\hat{y}_n(t)}{s^n}. \quad (4)$$

Метод определения поддиагональных сечений весовых функций n -го порядка ($2 \leq n \leq N$) НДС $\hat{w}_n(t - \tau_1, \dots, t - \tau_n)$ основывается на утверждении, доказательство которого приведено в [9].

Утверждение. Пусть тестовые воздействия представляют собой сумму n импульсных сигналов $x_i(t) = s\delta(t - \tau_i)$ ($i = \overline{1, n}$) со сдвигом по времени t на τ_1, \dots, τ_n , тогда оценка поддиагонального сечения весовой функции n -го порядка

$$\hat{w}_n(t - \tau_1, \dots, t - \tau_n) = \frac{(-1)^n}{n!s^n} \sum_{\xi_{\tau_1}, \dots, \xi_{\tau_n}=0}^1 (-1)^{\sum_{i=1}^n \xi_{\tau_i}} \hat{y}_n(t, \xi_{\tau_1}, \dots, \xi_{\tau_n}), \quad (5)$$

где $\hat{y}_n(t, \xi_{\tau_1}, \dots, \xi_{\tau_n})$ — оценка n -ой парциальной составляющей отклика нелинейной динамической системы в момент времени t , полученная в результате обработки данных экспериментов на основе (3) при действии на входе системы полиимпульсного сигнала с весом s , причем если $\xi_{\tau_i} = 1$, то тестовое воздействие содержит импульсный сигнал со сдвигом на τ_i , в противном случае, при $\xi_{\tau_i} = 0$ — не содержит.

Например, для определения весовой функции 2-го порядка сначала НДС испытывается импульсными сигналами со сдвигами по времени на τ_1 и τ_2 $x_1(t) = s\delta(t - \tau_1)$ и $x_2(t) = s\delta(t - \tau_2)$, измеряются соответствующие отклики $y(t, 1, 0)$ и $y(t, 0, 1)$. С помощью МНК находятся $\hat{y}_2(t, 1, 0)$ и $\hat{y}_2(t, 0, 1)$. Затем, на вход НДС подают

сумму двух импульсных сигналов $x(t) = s\delta(t - \tau_1) + s\delta(t - \tau_2)$ и из полученной при этом ПС $\hat{y}_2(t,1,1)$ отклика вычитаются ПС откликов на одиночные импульсные сигналы

$$\hat{y}_2(t,1,1) - \hat{y}_2(t,1,0) - \hat{y}_2(t,0,1) = 2s^2\hat{w}_2(t - \tau_1, t - \tau_2).$$

Из (5), после нормировки, следует

$$\hat{w}_2(t - \tau_1, t - \tau_2) = \frac{1}{2s^2} [\hat{y}_2(t,1,1) - \hat{y}_2(t,1,0) - \hat{y}_2(t,0,1)].$$

При фиксированных значениях τ_1 и τ_2 оценка весовой функции 2-го порядка $\hat{w}_2(t - \tau_1, t - \tau_2)$ представляет собой функцию от переменной t — сечение поверхности $\hat{h}_2(t_1, t_2)$ плоскостью, проходящей под углом в 45° к осям t_1 и t_2 и сдвинутой по оси t_1 на величину $\tau_0 = \tau_1 - \tau_2$. Изменяя величину τ_0 , получают различные сечения $\hat{w}_2(t, t - \tau_0)$, по которым можно восстановить всю поверхность $\hat{w}_2(t_1, t_2)$. При $\tau_1 - \tau_2 = 0$, получаем диагональное сечение $\hat{w}_2(t, t)$.

Таким образом, вычислительный алгоритм, реализующий метод идентификации многомерных весовых функций на основе соотношения (8) сводится к решению СЛАУ (4) для каждого фиксированного момента времени t на интервале $[0, T]$, где T — время моделирования.

Регуляризация процедуры оценки весовых функций

Система нормальных уравнений Гаусса (2) дает хорошие результаты по аппроксимации функций, если число измерений L достаточно велико (много больше, чем степень аппроксимирующего полинома N) или ошибки измерений малы. В противном случае определитель системы оказывается близким к нулю и система становится плохо обусловленной. При этом возможны большие ошибки в оценке параметров аппроксимирующего полинома.

Для получения устойчивого к погрешности измерений решения СЛАУ (4) используется метод регуляризации А.Н.Тихонова, основанный на вариационном способе построения регуляризующего оператора [7]. Этот метод сводится к нахождению приближенного вектора решения \hat{y}_α , минимизирующего некоторый сглаживающий функционал. Единственный вектор, удовлетворяющий условию минимума сглаживающего функционала, может быть определен из решения СЛАУ

$$(A'A + \alpha I)\hat{y}_\alpha = A' y, \quad (6)$$

где A' — транспонированная матрица; I — единичная матрица; α — параметр регуляризации Тихонова.

Приближенное решение, получаемое на основе (6), соответствует нулевому порядку регуляризации (слабая регуляризация). Для повышения гладкости решений используется регуляризационная матрица R и находится решение СЛАУ

$$(A'A + \alpha R)\hat{y}_\alpha = A' y, \quad (7)$$

при выбранном значении параметра α . Регуляризационная матрица R имеет ленточную структуру, диагональные элементы которой равны $r_{ii} = 1 - (\Delta a)^{-2}$, а элементы над- и поддиагоналей равны $r_{ij} = -(\Delta a)^{-2}, i \neq j; i, j = \overline{1, L}; \Delta a = a_L / L$.

При реализации данного алгоритма параметр регуляризации α выбирают достаточно малым из анализа имеющейся информации о погрешности исходных данных и погрешности вычислений. В работе подходящее значение параметра регуляризации α определяется путем подбора, т.е. многократным вычислениями \hat{y}_α для различных значений α . Квазиоптимальное значение параметра $\alpha = \alpha_0$ выбирается из условия

$$\|\hat{y}_{\alpha_{i+1}} - \hat{y}_{\alpha_i}\| = \min, \quad (8)$$

где $\alpha_{i+1} = \mu\alpha_i, 0 < \mu < 1, i = 0, 1, 2, \dots$. Необходимо отметить, что различные способы определения параметра регуляризации могут дать, вообще говоря, различные результаты и, как следствие, отличающиеся друг от друга регуляризованные решения [8].

Компьютерное моделирование

Для исследования метода идентификации выбран объект, который описывается нелинейным дифференциальным уравнением вида:

$$\frac{dy(t)}{dt} + \lambda y(t) + \beta y^2(t) = x(t), \quad (9)$$

где λ и β — постоянные коэффициенты. Модель объекта в виде интегростепенного полинома третьей степени при нулевых начальных условиях имеет вид:

$$y(t) = \int_0^t w_1(\tau_1)x(t-\tau_1)d\tau_1 + \int_0^t \int_0^t w_2(\tau_1, \tau_2)x(t-\tau_1)x(t-\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 + \\ + \int_0^t \int_0^t \int_0^t w_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3)x(t-\tau_1)x(t-\tau_2)x(t-\tau_3)d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3,$$

где весовые функции первого, второго и третьего порядков равны, соответственно

$$w_1(\tau_1) = e^{-\lambda\tau_1}, \quad (10)$$

$$w_2(\tau_1, \tau_2) = \frac{\beta}{\lambda}(e^{-\lambda(\tau_1+\tau_2)} - e^{-\lambda\tau_2}), \quad \tau_1 \leq \tau_2, \quad (11)$$

$$w_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = \frac{1}{3}\left(\frac{\beta}{\lambda}\right)^2 \cdot (e^{\lambda(\tau_1-\tau_2-\tau_3)} + 3e^{-\lambda(\tau_1+\tau_2+\tau_3)} - \\ - 4e^{-\lambda(\tau_2+\tau_3)} - 2e^{-\lambda(\tau_1+\tau_3)} + 2e^{-\lambda\tau_3}), \quad \tau_1 \leq \tau_2 \leq \tau_3. \quad (12)$$

Диагональные сечения весовых функций получаем, полагая $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = t$:

$$w_2(t, t) = \frac{\beta}{\lambda}(e^{-2\lambda t} - e^{-\lambda t}), \quad w(t, t, t) = \left(\frac{\beta}{\lambda}\right)^2 \cdot (e^{-3\lambda t} - 2e^{-2\lambda t} + e^{-\lambda t}).$$

Аналитические выражения для ядер Вольтерра используются в качестве эталонов для сравнения полученных на основе обработки данных эксперимента в соответствии с предлагаемым методом идентификации (4) и (5) весовых функций $\hat{w}_1(t)$, $\hat{w}_2(t_1, t_2)$, $\hat{w}_3(t_1, t_2, t_3)$.

Выполнено исследование точности и помехоустойчивости метода идентификации. Численные эксперименты проводились с помощью имитационного моделирования в среде MATLAB–SIMULINK. В качестве критерия качества идентификации (адекватности модели) используется нормированная среднеквадратичная ошибка (НСКО) оценки весовых функций при различных уровнях погрешностей измерений откликов НДС

$$\varepsilon_n = \sqrt{\sum_{t=1}^k (w_{nt} - \hat{w}_{nt})^2 \cdot \left(\sum_{t=1}^k w_{nt}^2\right)^{-1}},$$

где k — количество отчетов на интервале времени наблюдения; w_{nt} , \hat{w}_{nt} — эталонные значения и оценки весовой функции n -го порядка, полученные в результате обработки экспериментальных данных (откликов системы) в дискретные моменты времени t , соответственно.

Для повышения помехоустойчивости метода идентификации применяются процедуры шумоподавления (сглаживания) к получаемым оценкам весовых функций, основанные на вейвлет–преобразовании [10].

Шумоподавление обычно достигается удалением высокочастотных составляющих из спектра сигнала, представляющего аддитивную смесь информационной составляющей — весовой функции, получаемой в результате обработки откликов, и шума, обусловленного погрешностью измерительной аппаратуры. Применительно к вейвлетным разложениям это может быть реализовано непосредственно удалением детализирующих коэффициентов высокочастотных уровней. Задавая некоторый порог для их уровня, и срезая по нему детализирующие коэффициенты, можно уменьшать уровень шумов.

Для сглаживания результатов идентификации использовалась утилита *wden* из пакета расширения Wavelet Toolbox системы Matlab с материнским вейвлетом *coiflet* — *coif4* при следующих значениях параметров: параметр установки правила вычисления порогового значения для ограничения коэффициентов разложения TPTR='minimaxi' (по минимаксной оценке); параметр установки типа порога очистки SORH='s' (гибкий); параметр, определяющий способ пересчета порога SCAL='one' (использование порога, единого для всех уровней разложения, без перемасштабирования); глубина разложения данных — 3 [11].

В исследованиях модель, получаемой зашумленной оценки сечения весовой функции, принимается аддитивной: $w_n(t, t, \dots, t) + \zeta(t)$ с равномерным шагом по аргументу t , где $w_n(t, t, \dots, t)$ — полезная информационная составляющая, $\zeta(t)$ — помеха (белый гауссов шум с дисперсией σ^2 и средним нулевым значением).

В табл. 1 приведены значения НСКО идентификации тестовой НДС (8) в виде аппроксимационной модели Вольтерра третьего порядка с использованием тестовых импульсов разной полярности при различных уровнях погрешности измерений 1%, 3% и 5% и применении регуляризации на основе (7).

На рис. 1 представлены эталонные весовые функции для тестовой НДС (9) $w_1(t)$, $w_2(t,t)$, $w_3(t,t,t)$, вычисленные на основе аналитических выражений (10) – (12). Результаты идентификации тестовой НДС с использованием импульсных сигналов (Δa , $L=20$) и применением регуляризованного МНК при измерениях откликов с погрешностью 3 % — оценки весовых функций $\hat{w}_1(t)$, $\hat{w}_2(t,t)$, $\hat{w}_3(t,t,t)$ представлены на рис. 2 – 4 соответственно.

На рис. 3, 4 приведены оценки диагональных сечений весовых функций второго и третьего порядков тестовой НДС при погрешности измерений откликов 3% без сглаживания (а) и после сглаживания (б).

Таблица 1.

НСКО оценки весовых функций тестовой НДС 1–го, 2–го и 3–го порядков

n	Δa	L	До сглаживания				После сглаживания		
			0%	1%	3%	5%	1%	3%	5%
1	50	4	0,0084	0,0707	0,2358	0,3799	0,0258	0,0677	0,0998
2			0,1536	0,2633	0,5522	0,8292	0,2177	0,3455	0,4993
3			0,2469	1,0575	3,5061	5,3985	0,4423	0,9244	1,3222
1	25	8	0,0086	0,0269	0,0779	0,1329	0,0151	0,0282	0,0421
2			0,1366	0,1905	0,3146	0,4538	0,1686	0,2228	0,2838
3			0,2568	0,5114	1,2161	2,1412	0,3399	0,5089	0,6782
1	20	10	0,0086	0,0203	0,0534	0,0992	0,0138	0,023	0,0342
2			0,1319	0,1716	0,2869	0,3941	0,1534	0,2	0,2436
3			0,2522	0,3915	0,9032	1,6804	0,3168	0,4415	0,575
1	12,5	16	0,0085	0,0127	0,0317	0,0461	0,011	0,0154	0,0207
2			0,1241	0,1484	0,2104	0,2785	0,1356	0,1572	0,1836
3			0,2412	0,2757	0,6014	0,8409	0,276	0,3409	0,4065
1	10	20	0,0085	0,0111	0,0239	0,0359	0,0101	0,0138	0,0179
2			0,1212	0,1392	0,1877	0,2472	0,13	0,1468	0,1663
3			0,2364	0,2581	0,4403	0,6885	0,2607	0,3113	0,3501

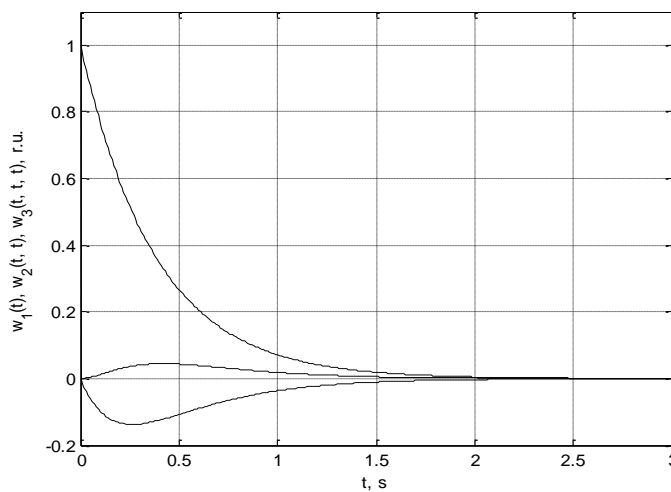


Рис. 1. Эталонные весовые функции $w_1(t)$, $w_2(t,t)$, $w_3(t,t,t)$, вычисленные на основе выражений (15) – (17) для тестовой НДС

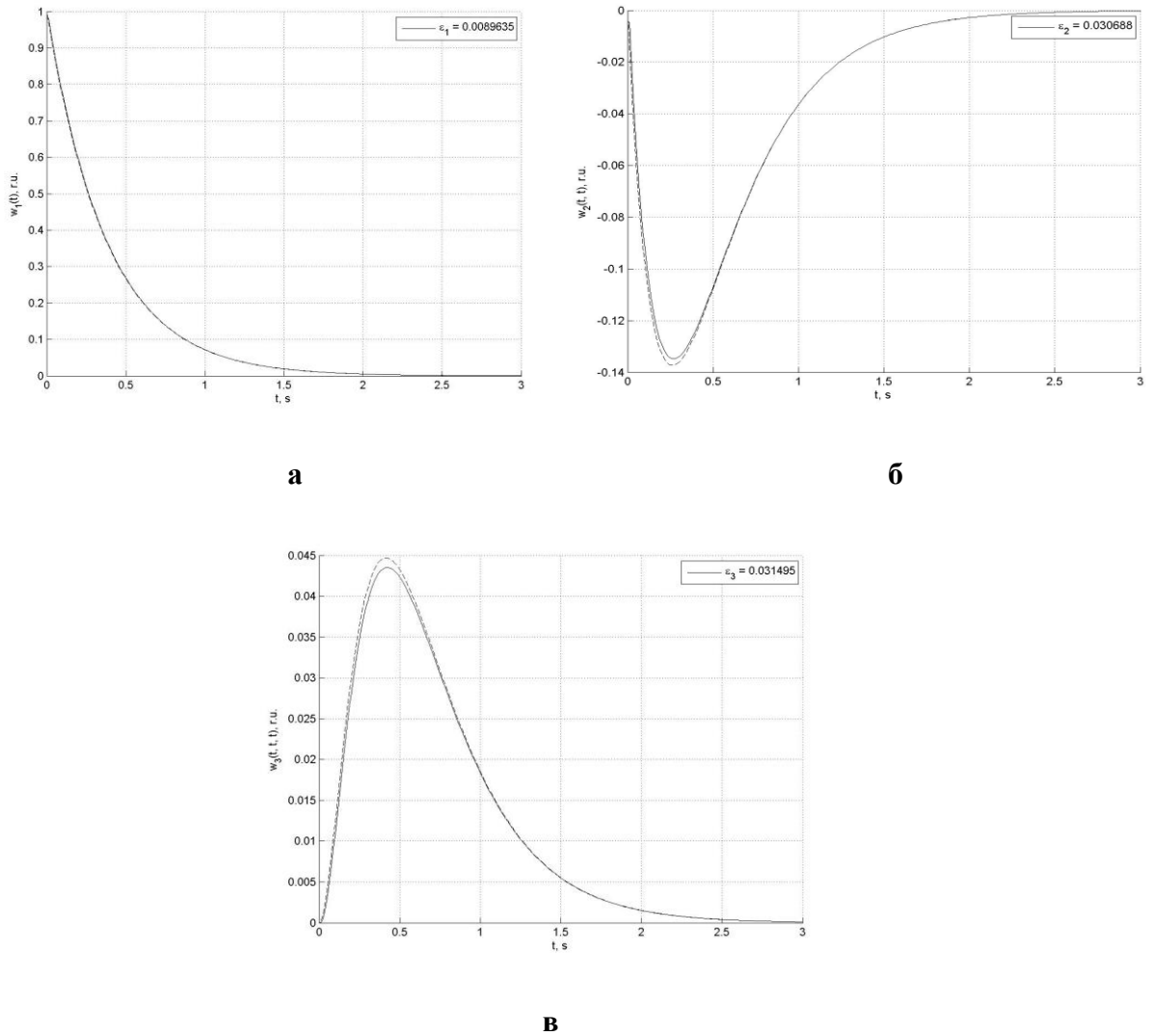


Рис. 2. Оценки диагональных сечений весовых функций: а – оценка весовой функции 1-го порядка при точных измерениях и эталонная функция (пунктиром) тестовой НДС; б – оценка диагонального сечения весовой функции 2-го порядка при точных измерениях и эталонная функция (пунктиром) тестовой НДС; в – оценка диагонального сечения весовой функции 3-го порядка при точных измерениях и эталонная функция (пунктиром) тестовой НДС

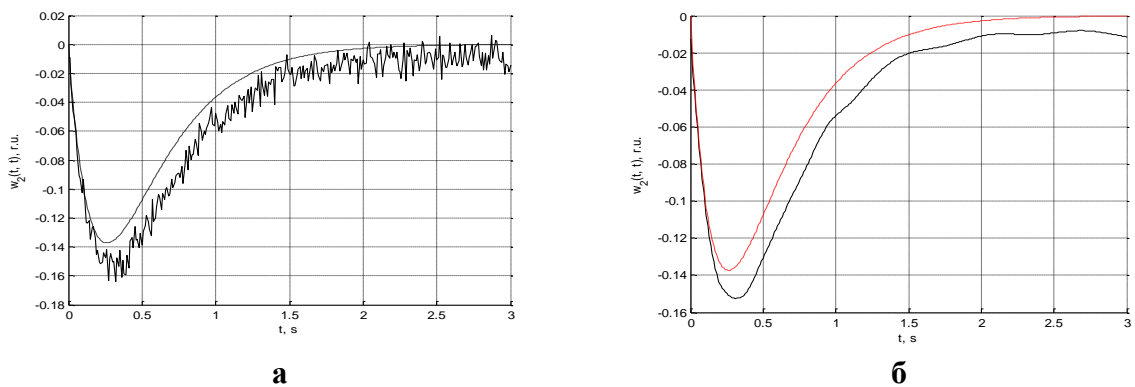


Рис. 3. Оценки диагонального сечения весовой функции 2-го порядка при погрешности измерений 3 % и эталонная функция (пунктиром) тестовой НДС: а – без сглаживания; б – после сглаживания

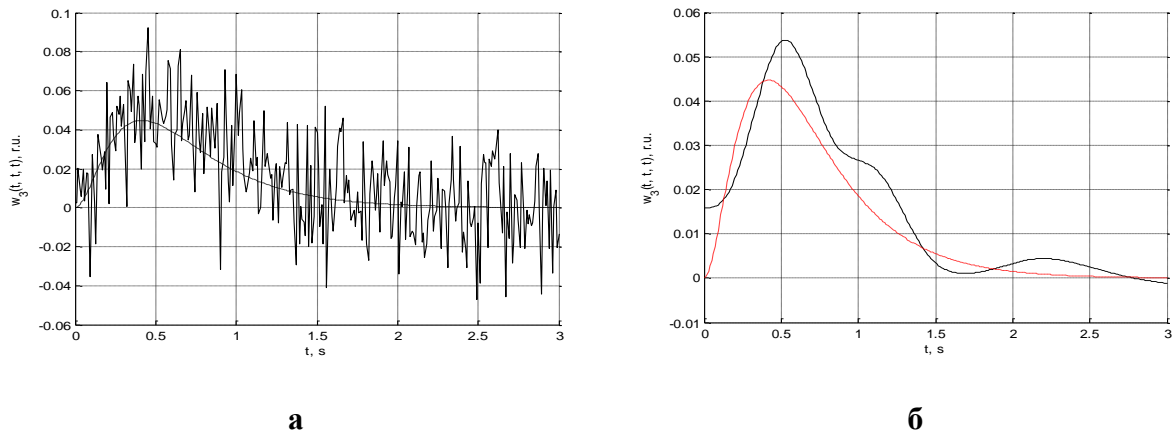


Рис. 4. Оценки диагонального сечения весовой функции 3-го порядка при погрешности измерений 3 % и эталонная функция (пунктиром) тестовой НДС: а – без сглаживания; б – после сглаживания

Выводы

На результаты идентификации аппроксимационной модели Вольтерра НДС при использовании тестовых полиимпульсных сигналов существенное влияние оказывают погрешности измерений. Для тестовой НДС средствами имитационного моделирования в среде Matlab-Simulink выполнены исследования точности и помехоустойчивости получаемых оценок весовых функций первого, второго и третьего порядков. Приемлемые на практике точность и помехоустойчивость достигаются применением метода регуляризации некорректных задач по А.Н.Тихонову. Для повышения вычислительной устойчивости алгоритмов идентификации применяются процедуры шумоподавления к получаемым оценкам многомерных весовых функций, основанные на вейвлет-преобразовании, что позволяет получить сглаженные решения и уменьшить погрешность идентификации в 1,5–3 раза.

Список литературы

1. Пупков, К. А. Методы классической и современной теории автоматического управления: Учебник для ВУЗов. В 5 т. Т. 2: Статистическая динамика и идентификация систем автоматического управления / К. А. Пупков, Н. Д. Егупов. – М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 638 с.
2. Doyle, F. J. Identification and Control Using Volterra Models / F.J. Doyle, R.K. Pearson, Ogunnaikе B.A. – Published Springer Technology & Industrial Arts. – 2001. – 314 p.
3. Pavlenko, V. Computing of the Volterra Kernels of a Nonlinear System Using Impulse Response Data / V. Pavlenko, M. Massri, V. Ilyin // Proceedings of 9th International Middle Eastern Simulation Multiconference MESM'2008, August 26-28, 2008, Philadelphia University, Amman, Jordan. – P. 131-138.
4. Апарцин, А. С. К исследованию устойчивости решения полиномиального уравнения Вольтерра I рода / А. С. Апарцин // Автоматика и телемеханика. – 2011. – № 6. – С. 95-102.
5. Данилов, Л. В. Теория нелинейных электрических цепей / Л. В. Данилов, П. Н. Матханов, Е. С. Филиппов. — Л. : Энергоатомиздат, 1990. — 256 с.
6. Масри, М. М. Построение аппроксимационной модели Вольтерра нелинейной системы с помощью многоступенчатых тестовых сигналов / М. М. Масри // Математичне та комп'ютерне моделювання Серія: Технічні науки: зб. наук. праць [Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова Національної академії наук України, Кам'янець-Подільський

- національний університет імені Івана Огієнка]. – Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2014. – Вип. 11. – С. 107-116.
7. Тихонов, А. Н. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация / А. Н. Тихонов, А. Н. Гончарский, В. В. Степанов и др. – М. : Наука, 1983. – 200 с.
 8. Верлань, А. Ф. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы / А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков. – Киев : Наук. думка, 1986. – 542 с.
 9. Павленко, В. Д. Методы детерминированной идентификации нелинейных систем в виде моделей Вольтерра / В. Д. Павленко, С. В. Павленко // XII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2014. Москва, 16-19 июня 2014: Труды. [Электронный ресурс]. – М.: Ин-т проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2014. – С.2830-2841. – ISBN 978-5-91450-151-5
 10. Павленко, С. В. Применение вейвлет-фильтрации в процедуре идентификации нелинейных систем на основе моделей Вольтерра / С. В. Павленко // Восточно-европейский журнал передовых технологий [Харьков]. – 2010. – №6/4 (48). – С. 65-70.
 11. Смоленцев, Н. К. Основы теории вейвлетов. Вейвлеты в MATLAB / Н. К. Смоленцев. – М.: ДМК Пресс, 2005. – 304 с.

ПОБУДОВА АПРОКСИМАЦІЙНОЇ МОДЕЛІ ВОЛЬТЕРРА НЕЛІНІЙНОЇ СИСТЕМИ ЗА ДОПОМОГОЮ ПОЛІІМПУЛЬСНИХ ТЕСТОВИХ СИГНАЛІВ

М. М. Масрі, С. В. Павленко, В. Д. Павленко

Одеський національний політехнічний університет,
просп. Шевченка, 1, Одеса, 65044, Україна; e-mail: pavlenko_vitalij@mail.ru

Наведено теоретичне обґрунтування методу ідентифікації нелінійної динамічної системи на основі апроксимаційної моделі Вольтерра при використанні тестових поліімпульсних сигналів з урахуванням похибок вимірювань відгуків. Для забезпечення обчислювальної стійкості методу ідентифікації застосовується метод регуляризації і процедури шумозаглушення, засновані на вейвлет-перетворенні. Досліджується ефективність обчислювальних алгоритмів, що реалізують метод ідентифікації.

Ключові слова: нелінійні динамічні системи, ідентифікація, модель Вольтерра, ядра Вольтерра, апроксимаційна модель, метод найменших квадратів, регуляризація, вейвлет-перетворення, поліімпульсні тестові сигнали.

CONSTRUCTION OF APPROXIMATION MODEL VOLTEPRA NONLINEAR SYSTEM BY MEANS POLY IMPULSES OF TEST SIGNALS

M. M. Masri, S. V. Pavlenko, V. D. Pavlenko

Odessa National Polytechnic University,
1, Shevchenko Ave., Odessa, 65044, Ukraine; e-mail: pavlenko_vitalij@mail.ru

The theoretical substantiation of the method of identification of nonlinear dynamical systems based on approximation of the Volterra model when using the test polyimpulse signals with respect to the measurement errors of the responses. To ensure numerical stability of the method of identification used regularization method and procedure of denoising based on wavelet transformation. Investigates the efficiency of computational algorithms that implement a method of identification.

Keywords: nonlinear dynamical systems, identification, Volterra model, Volterra kernels, approximation model, method of least squares, regularization, wavelet transform, poly impulse test signals.

МОДЕЛИРОВАНИЕ УСТАЛОСТНЫХ ТРЕЩИН В ТРУБЧАТЫХ ОСЯХ ПРИ ИЗГИБЕ С ВРАЩЕНИЕМ

Й. Ариза Де Мигель

Университет Страны Басков,
Квартал Сарьена, Лейо, 48940, Страна Басков, Испания; e-mail: jonarizademiguel@gmail.com

Разработана геометрическая модель развития поверхностных усталостных трещин в трубчатых осях при изгибе с вращением, соответствующая эмпирическим наблюдениям и теоретическим моделям, предложенным другими авторами. Точность обобщенной геометрической модели подтверждена результатами МКЭ-моделирования. Разработан способ расчетной коррекции коэффициентов интенсивности напряжения при изгибе осей с вращением. В совокупности оба метода позволяют прогнозировать остаточное число циклов до достижения трещиной определенной глубины.

Ключевые слова: полуэллиптическая трещина, коэффициент интенсивности напряжений, остаточный ресурс оси

Введение

Исследование условий возникновения и развития поверхностных усталостных трещин во вращающихся осях и валах является актуальным не только для установления причин разрушения конструкций, но и для повышения надежности их проектирования и эксплуатации в составе скоростных видов транспорта, металлургических машин, крупногабаритных редукторов и др. машин и механизмов. Неоспоримые преимущества при этом имеют аналитические методы исследований, отличающиеся математической строгостью, простотой анализа результатов и адаптивностью к нормативным методикам инженерных расчетов.

Цель исследования

В ряде экспериментальных исследований установлено, что поверхностные трещины различной геометрии в процессе развития стремятся к единой полуэллиптической форме [1]. Разработаны аналитические модели и получены уравнения для расчета коэффициентов интенсивности напряжения (КИН) в характерных точках усталостных трещин валов и осей при переменном изгибе и кручении [2]. В частности, отмечены особенности развития трещин при изгибе с вращением сплошных и трубчатых осей. При этом аналитические расчетные методики и соответствующие базовые модели авторами не разработаны [3].

Цель исследования – обоснование и разработка инженерного метода расчета КИН и аналитического прогнозирования развития поверхностных усталостных трещин в трубчатых осях при изгибе с вращением.

Анализ литературы

Адекватность базовой геометрической модели поверхностной трещины является необходимым условием для дальнейшего исследования ее развития. На основании эмпирических наблюдений *Fonte M.* и др. [1, 2, 3] предложена двухпараметрическая модель, в которой установлено постоянное отношение между углом раскрытия полуэллиптической трещины φ и её глубиной b (рис. 1). Модель для изгиба осей сплошных или трубчатых представлена в виде

$$\left. \begin{aligned} \bar{a} &= \frac{a}{D} = \frac{1}{2} \sin \varphi \left[1 - \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 - \cos \varphi}{\varphi} \right)^2 \right]^{0,5}; \\ \bar{b} &= \frac{b}{D} = \frac{\varphi}{\pi}; \\ \bar{c} &= \frac{c}{D} = 0,5. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

При этом отмечено, что геометрическая форма трещин в соответствии с данной моделью не меняется в случае изгиба оси с вращением.

В исследованиях *Carpinteri A.* и др. установлено, что при изгибе с вращением пересечение фронта трещины с наружной поверхностью оси происходит под углом, близким к $\pi/2$ [3].

Для модели (1) это условие не выполняется, поэтому предложены следующие уточнения:

$$\bar{a} = 0,5 \sin \varphi (\cos \varphi)^{-0,5}; \quad \bar{b} = 0,5 (1 - \cos \varphi)^{0,5}; \quad \bar{c} = 0,5. \quad (2)$$

Расчетная обобщающая модель. Дальнейшим развитием моделей (1) и (2) является однопараметрическая модель геометрии поверхностной трещины, отличающаяся тем, что форма фронта трещины и положение его центра являются функциями только угла раскрытия трещины φ [1, 4]. При этом обеспечивается выполнение трех основных условий, подтверждаемых фрактограммами усталостных разрушений и результатами многочисленных испытаний на образцах, а именно:

- исходная форма зарождающейся усталостной трещины полукруговая;
- соблюдается отношение, установленное *Fonte M.* [1, 2];
- выполняется условие перпендикулярности по *Carpinteri A.* [4].

Обобщающая модель (рис. 1) имеет вид

$$\bar{a} = \frac{\sin \varphi}{2\sqrt{2}} \cdot \left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{4\bar{b}}{\cos \varphi} \right)^2} \right]^{0,5}; \quad \bar{b} = \frac{\varphi}{\pi} \left[1 + \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \cos \varphi \right]; \quad \bar{c} = \frac{\cos \varphi}{2} \cdot \left[1 + \left(\frac{\bar{b} \sin \varphi}{\bar{a} \cos \varphi} \right)^2 \right]. \quad (3)$$

Адекватность модели (3) предложено проверить путем анализа изменений геометрии развивающейся трещины в соответствии с уравнением [5]

$$\frac{db}{dN} = C \cdot (\Delta K_I)^n, \quad (4)$$

где N – число циклов за определённый период работы;

ΔK_I – изменение коэффициента интенсивности напряжений за тот же период;

C и n – постоянные, зависящие от материала и условий нагружения (например, для стали 42CrMo4 принято $n=3$ и $C = 4,9 \cdot 10^{-12}$ [6]).

Установив значения ΔK_I для характерных точек фронта трещины, можно определить дискретные изменения геометрии развивающейся усталостной трещины [1, 2]. Например, рассчитав значения K_I^* в точках P и B , можно вычислить приращение относительной глубины трещины $\overline{PP'}$ и определить в соответствии с моделью (3) ее новую форму (рис. 2) по уравнению

$$\overline{BB'} = \overline{PP'} \cdot \left(\frac{\Delta K_{IB}}{\Delta K_{IP}} \right)^n = \overline{PP'} \cdot \left(\frac{K_{IB}^*}{K_{IP}^*} \right)^n. \quad (5)$$

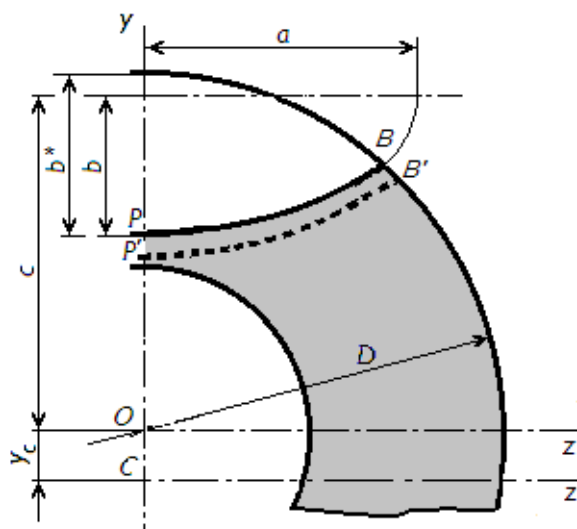


Рис. 1. Расчетная схема характеристик сечения оси с усталостной трещиной

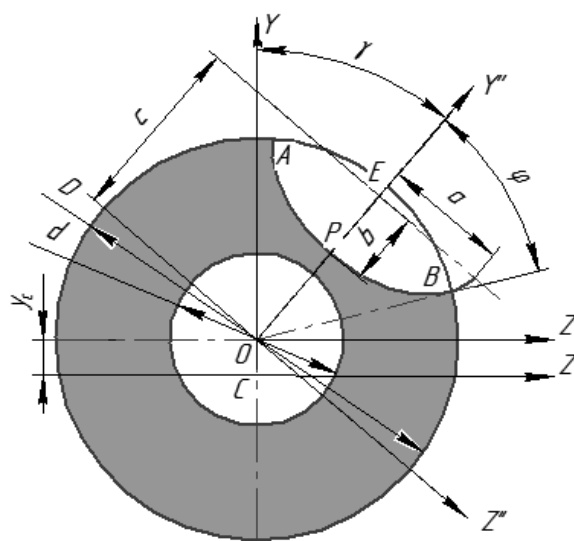


Рис. 2. Расчетная схема оси с трещиной при изгибе с вращением

Значения K_I^* вычислены по уравнениям, предложенным Огунуак I.V. и др. [7] для трубопровода, подверженного деформациям изгиба, в виде

$$K_I^* = \frac{K_I}{\sigma\sqrt{\pi b}} = \psi \cdot \gamma \cdot \pi^{-0,5} \left(2 - \frac{1,64\bar{b}^*}{\varphi} \right) \left[1 - \left(0,89 - 0,57\sqrt{\frac{2\bar{b}^*}{\varphi}} \right)^3 \left(\frac{2\bar{b}^*}{1-k_h} \right)^{1,5} \right]^{-3,25}, \quad (6)$$

где $k_h = d/D$ – коэффициент пустотелости оси; параметр $\bar{b}^* = 1/2 - \bar{c} + \bar{b}$.

Корректирующая краевая функция в точках P и B

$$\gamma_P = 1,0; \gamma_B = \left[1,1 + 0,35 \left(\frac{2\bar{b}^*}{1-k_h} \right)^2 \right] \sqrt{\frac{2\bar{b}^*}{\varphi}}. \quad (7)$$

Эквивалентные относительные напряжения ψ в характерных точках трещины

$$\left. \begin{aligned} \psi_P &= 1 - 0,2668\bar{b}^* + 0,44\bar{b}^* \left[\frac{2,545\bar{b}^*}{1-k_h} \left(1 - \sqrt{\frac{2\bar{b}^*}{\varphi}} \right) - \frac{\bar{b}^*}{\varphi} \right] \\ \psi_B &= 1 - 0,36\bar{b}^* \end{aligned} \right\}. \quad (8)$$

Поскольку уравнения, аналогичные (6), для изгиба оси с вращением в известных публикациях отсутствуют, предложено приближенное решение, позволяющее установить изменение циклических напряжений на краях трещины при изгибе оси и ее одновременном вращении относительно плоскости изгиба YOX (рис. 2). Применение такого решения ограничено:

- глубиной развивающейся трещины $\bar{b}^* \leq 0,35(1 - k_h)$;
- условием непересечения трещиной внутреннего отверстия.

В результате поворота оси и перемещении трещины в направлении от нейтрального слоя напряжения в крайней точке (например, в т. A) по мере приближения к вертикальной плоскости изгиба YOX увеличиваются раньше, чем в точках P и B . После прохождения плоскости изгиба YOX – наоборот, напряжения в т. A уменьшаются раньше, чем в точках P и B . Таким образом объясняется эффект выпрямления усталостных трещин при изгибе с вращением, наблюдаемый на фрактограммах усталостных разрушений натуральных осей и опытных образцов.

В результате исследований характеристик прочности трубчатой оси с поверхностной полуэллиптической трещиной при изгибе установлено, что определенное влияние на распределение номинальных напряжений по длине фронта трещины может оказывать смещение центра масс сечения [4, 8, 9]. В соответствии с разработанной аналитической методикой можно вычислить перемещение центра масс (расстояние u_c на рис. 1, 2) и определить изменение номинальных напряжений в любой точке фронта трещины в приведенной последовательности. Для этого:

1. Определяют вспомогательный угол: $\delta = \arccos\left(\frac{2\bar{c} - \cos\varphi}{2\bar{b}}\right)$

и вспомогательные функции

$$\left. \begin{aligned} \Phi_m(\varphi) &= m \cdot \varphi - \sin(m \cdot \varphi) \\ \Phi_m(\delta) &= m \cdot \delta - \sin(m \cdot \delta) \end{aligned} \right\},$$

где $m=2; 4$.

2. Рассчитывают площадь неповрежденной части сечения

$$F = \pi D^2(1 - k_h^2)/4 - D^2\Phi_2(\varphi)/8 - ab\Phi_2(\delta)/2,$$

и соответствующий статический момент $S_{Z'} = D^3 \sin^3 \varphi/12 - 2ab^2 \sin^3 \delta/3 + abc\Phi_2(\delta)/2$.

3. Определяют величину смещения центра тяжести сечения: $y_c = \overline{OC} = S_{Z'}/F$.
4. Рассчитывают главные моменты инерции сечения

$$\left. \begin{aligned} I_{Z''} &= \frac{\pi D^4(1 - k_h^4)}{64} - \frac{D^4\Phi_4(\varphi)}{256} - \frac{ab^3\Phi_4(\delta)}{16} - \frac{abc^2\Phi_2(\delta)}{2} + \frac{4ab^2c \sin^3 \delta}{3} \\ I_{Y''} &= \frac{\pi D^4(1 - k_h^4)}{64} - \frac{D^4\Phi_4(\varphi)}{256} - \frac{ba^3\Phi_4(\delta)}{16} + \frac{D^4 \sin^3 \delta}{24} \end{aligned} \right\},$$

и момент инерции относительно оси $\overline{OZ'}$ при повороте сечения

$$I_{Z'} = \sqrt{(I_{Z''} \cdot \cos \gamma)^2 + (I_{Y''} \cdot \sin \gamma)^2}.$$

5. Определяют величину момента инерции сечения относительно оси \overline{OZ}

$$I_Z = I_{Z'} - y_c^2 \cdot F.$$

6. Определяют величину напряжения $\overline{\sigma_B}$, на которую увеличивается номинальное напряжение в т. B при учете вращения, приняв диаметр оси равным единице

$$\overline{\sigma_B} = \frac{\sigma_B|_{\gamma=-\varphi}}{\sigma_B|_{\gamma=0}} = \frac{(D/2 + y_c|_{\gamma=-\varphi})/I_Z|_{\gamma=-\varphi}}{(D/2 \cdot \cos \gamma + y_c|_{\gamma=0})/I_Z|_{\gamma=0}} = \frac{I_Z|_{\gamma=0}}{I_Z|_{\gamma=-\varphi}} \cdot \frac{1 + 2y_c|_{\gamma=-\varphi}}{\cos \gamma + 2y_c|_{\gamma=0}}. \quad (9)$$

7. Умножив величину $\overline{\sigma_B}$ на значение КИН при изгибе оси без учета вращения, получают новые $K_{IB}^* = \overline{\sigma_B} \cdot K_{IB}^*$, при которых трещина развивается иначе.

Анализ результатов расчетов функции $\overline{\sigma_B}(\overline{b^*})$ показал, что по мере развития усталостной трещины увеличение номинальных напряжений при изгибе оси с вращением не превышает 8% (рис. 3). Точки на рисунке соответствуют значениям $\overline{\sigma_B}(\overline{b^*})$ по результатам МКЭ-моделирования, что подтверждает приемлемую точность предложенной методики расчета (п.п. 1 - 6).

Результаты расчетного моделирования по уравнениям (4) - (6) подтвердили, что после достижения глубины $\overline{b^*} = 0,1$ все трещины, независимо от своей первоначально сегментной, полукруглой или полуэллиптической формы (табл. 1), стремятся к одинаковой полуэллиптической форме (рис. 3). Следовательно, установив значения K_{IP}^* в центре фронта трещины полуэллиптической формы можно прогнозировать ее развитие без применения сложных компьютерных программ и моделей.

Аналитическое моделирование изменения геометрии первоначально полукруглой трещины (рис. 4) выполнено по трем рассмотренным выше моделям, описываемыми уравнениями (1) – линии 1; уравнениями (3) – линии 3 и уравнениями (4), ..., (9) – линии 2.

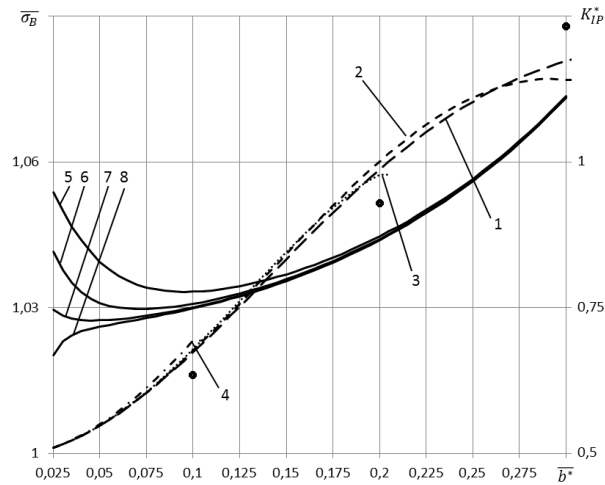


Рис. 3. Графики функции $\bar{\sigma}_B(\bar{b}^*)$ при развитии трещины первоначально полукруглой формы $\bar{a} = \bar{b} = 0,02$ (кривые 1, 2, ..., 4 соответствуют $k_h = 0; 0,4; 0,6; 0,8$), а также графики функции $K_{IP}^*(\bar{b}^*)$ при различной исходной форме трещины (кривые 5, 6, ..., 8, табл. 1)

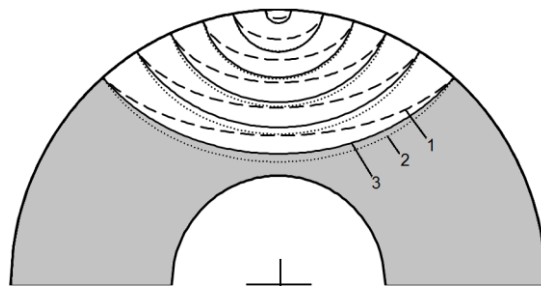


Рис. 4. Схема развития поверхностной усталостной трещины ($\bar{a} = \bar{b} = 0,02$) при изгибе с вращением трубчатой оси ($k_h = 0,4$)

Установлено, что геометрия развивающейся усталостной трещины при изгибе оси с вращением на основании уравнений (3) и уравнений (4) - (9) совпадает с точностью до 4% в любой точке.

Из (5) и (6) следует

$$dN = \frac{db}{C \cdot (K_I^* \cdot \Delta\sigma \cdot \sqrt{\pi b})^n} = \frac{1}{C \cdot (\Delta\sigma)^n} \cdot \frac{db}{(K_I^* \cdot \sqrt{\pi b})^n} \quad (10)$$

Таблица 1.

Исходные размеры трещин различной формы

	\bar{a}	\bar{b}	\bar{c}		\bar{a}	\bar{b}	\bar{c}
5	0,06	0,025	0,5	7	0,03	0,025	0,5
6	0,05	0,025	0,5	8	0,025	0,025	0,5

В результате аппроксимации полиномом функции $K_{IP}^*(\bar{b}^*)$ (рис. 3) получено

$$\frac{1}{(K_I^* \cdot \sqrt{\pi b})^n} \approx \sum_{i=0}^k G_i \cdot b^i, \quad (11)$$

где i – степень полинома; G_i – постоянные коэффициенты, полученные при $k = 6$ (табл. 2), когда отклонение полинома не превышает 6% в диапазоне значений $\bar{b}^* = 0,1 \dots 0,5$.

Таблица 2.

Значения коэффициента G_i

i	G_i	i	G_i	i	G_i	i	G_i
1	145,6600	3	5100,9837	5	28235,6530	7	11806,7170
2	-1070,1290	4	-15457,7653	6	-28197,5878	–	–

После подстановки (11) в (10) и преобразований получено

$$\Delta N = \frac{1}{C \cdot (\Delta \sigma)^n} \cdot \sum_{i=1}^k G_i \cdot (b_f^i - b_o^i), \quad (12)$$

где b_f и b_o – окончательная и исходная глубина трещины.

Уравнение (12), полученное на основании (4), позволяет вычислить число циклов нагружения оси при изгибе с вращением до достижения усталостной трещиной определенной глубины b_f . По результатам расчетов ресурса трубчатых осей установлено, что наличие исходной усталостной трещины и ее последующее развитие при изгибе с вращением приводит к незначительному уменьшению расчетного ресурса (до 2,5%). Полученный результат хорошо согласуется с опытными данными [3], в которых отмечено, что фактор вращения при изгибе трубчатых осей практически не влияет на скорость развития трещины при одинаковом значении изгибающего момента.

Выводы

На основании результатов исследований сделаны следующие выводы:

1. Предложена обобщающая аналитическая модель геометрии развивающейся поверхностной усталостной трещины для трубчатой оси при изгибе.
2. Разработан метод коррекции значений КИН для трубчатых осей, учитывающий особенности развития усталостных трещин при изгибе с вращением. На основании моделирования развития формы первоначально полукруглой трещины по трем моделям и сопоставления результатов подтверждена достаточная точность предложенной коррекции (до 4%).
3. Предложено уравнение, позволяющее прогнозировать остаточный ресурс трубчатой оси при изгибе с вращением по критерию допустимой глубины усталостной трещины.

Список литературы

1. Freitas, M. Effect of steady torsion on fatigue crack initiation and propagation under rotating bending: Multiaxial fatigue and mixed-mode cracking / M. Freitas, L. Reis, M. Fonte, B. Li // Engineering Fracture Mechanics. – 2011. – Vol. 78. – P. 826 – 835.
2. Fonte, M. Stress Intensity Factors for semi-elliptical surface cracks in round bars under bending and torsion / M. Fonte, M. Freitas // International Journal of Fatigue. – 1999. – Vol. 21. – P. 457 – 463.
3. Carpinteri, A. Fatigue growth simulation of part-through flaws in thick-walled pipes under rotary bending / A. Carpinteri, R. Brighenti, A. Spagnoli // International Journal of Fatigue, 2000. – Vol. 22. – P. 1 – 9.
4. Ariza De Miguel, J. Tensiones en ejes huecos con una grieta superficial bajo flexión rotativa / J. Ariza De Miguel, S.S. Gutyrya, Y.M. Khomiak // Revista DYNA, 2014. – Vol. 89(1). – P. 85 – 88.
5. Paris, P.C. Critical analysis of crack propagation laws / P.C. Paris, F. Erdogan // Trans. ASME Series D, Journal of Basic Engineering, 163, 1963. – Vol. 85. – P. 528 – 534.
6. BS 7910-2005. Guide on methods for assessing the acceptability of flaws in metallic structures. – London, 2005.
7. Orynyak, I.V. Analysis of Stable Crack Growth on the Basis of a Two-Criterion Approach / I.V. Orynyak, S.A. Radchenko // Strength of Materials, 2001. – Vol. 33. – P. 535 – 547.
8. Гутыря, С.С. Напряжения в трубчатых осях с усталостными эллиптическими трещинами при изгибе с вращением / С.С. Гутыря, Ю.М. Хомяк, Й. Ариза Де Мигель // Вісник СевНТУ: зб. наук. праць. – Вип. 148/2014. Серія: Механіка, енергетика, екологія. – Севастополь, 2014. – P. 15 – 19.
9. Гутыря, С.С. Характеристики прочности трубчатых осей при развитии усталостной трещины / С.С. Гутыря, Ю.М. Хомяк, Й. Ариза Де Мигель // Праці Одеського політехн. ун-ту, 2013. – Вип. 3(42). – P. 17 – 22.

МОДЕЛЮВАННЯ ВТОМНИХ ТРІЩИН В ТРУБЧАСТИХ ОСЯХ ПРИ ВИГІНІ З ОБЕРТАННЯМ

Й. Ариза Де Мигель

Університет Країни Басків,

Квартал Сарьена, Лейоа, 48940, Країна Басків, Іспанія; e-mail: jonarizademiguel@gmail.com

Розроблена оригінальна геометрична модель розвитку втомних поверхневих тріщин в трубчастих осях при вигині з обертанням, узагальнюючі відомі емпіричні результати та теоретичні моделі. Адекватність моделі підтверджена результатами МСЕ-моделювання. Розроблено спосіб розрахункової корекції КІН при вигині осей з обертанням. У сукупності обидва методи дозволяють прогнозувати залишкове число циклів до досягнення тріщини певної глибини.

Ключові слова: напівеліптична тріщина, коефіцієнт інтенсивності напружень, залишковий ресурс осі

MODELLING OF FATIGUE CRACKS IN HOLLOW AXLES UNDER ROTATING BENDING

J. Ariza De Miguel

University of the Basque Country, Bilbao,

Barrio de Sarriena s/n, Leioa, 48940, Bizkaia; e-mail: jonarizademiguel@gmail.com

A geometrical model for surface fatigue cracks on axles under rotating bending is developed, which complies with empirical and theoretical observations made by other authors, and its accuracy asserted by means of crack growth calculations based on the finite element method. Furthermore, a method for converting SIF of non-rotating axles into rotating ones is presented. Both methods combined allow a cycle calculation procedure from a certain crack size down to any depth.

Keywords: poluëlliptycheskaya treschyna, Factor intensity tense, ostatochnyy resource wasps

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ ГАЗИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ В ДОКРИТИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ ГЕТЕРОГЕННЫХ СИСТЕМ

В.С. Савич

Одесский национальный политехнический университет,
просп. Шевченко 1, Одесса 65044, Украина; e-mail: savichsp@gmail.com

Предложена математическая модель зародышеобразования для фазового перехода системы «газ — фильтрующаяся жидкость» с учетом зависимости поверхностного натяжения от радиуса кривизны поверхности разрыва и электрического заряда. Исследовано поведение газированной жидкости в докритической области и выявлены зоны псевдопластического (аномального) и дилатантного (близкого к ньютоновскому) течений, а также условий фильтрации, приводящие к указанным формам течений.

Ключевые слова: пористая среда, фильтрация, ньютоновская жидкость, не ньютоновская жидкость, газонасыщенность, расход газонасыщенной жидкости.

Введение

При создании современных (в том числе компьютеризированных) систем управления сложными технологическими процессами важнейшую роль играет выбор адекватной математической модели (ММ) процесса. От этого, в значительной мере, зависят такие показатели качества систем управления как точность, энергетические затраты на управление, быстродействие и т.д. В нефтедобывающей отрасли определяющими большинство технологических процессов физическими явлениями выступают фильтрационные движения жидкостей в пористой среде. Поэтому получение достоверных ММ фильтрационных процессов представляет собой актуальную задачу создания эффективных САУ в нефтедобывающей промышленности. Течение газированных жидкостей характеризуется сложностью происходящих физических процессов, которые предопределяются как фазовыми превращениями, так и влиянием пористой среды.

Важнейшим классом гетерогенных систем являются газированные жидкости. Под газированной жидкостью подразумевается жидкость, содержащая растворенный газ. При движении такой жидкости в зонах пониженного давления будет происходить выделение газа, которое будет существенно влиять на характер течения. Газированные жидкости при давлении выше давления насыщения, как правило, исследуются как гомогенные, так как классическая теория фазовых переходов предполагает закритическое образование зародышей новой фазы. Исследования показывают, что при давлении выше давления насыщения газированные системы, составленные на основе ньютоновских жидкостей при стационарной фильтрации, качественно меняют реологию (в частности расход жидкости возрастает в 2-3 раза), а при нестационарных исследованиях проявляют неравновесные свойства.

Физические причины и соответствующий механизм докритического образования зародышей новой фазы исследованы в ряде известных работ [1 – 3]. В частности, в [1] была выдвинута теория гетерофазных флуктуаций, на основе которой объяснены полученные к тому времени экспериментальные факты, а в [2] показано, что гетерофазные флуктуации велики там, где поверхностное натяжение между фазами стремится к нулю, причем «переходные явления» обязаны поверхностным эффектам.

Это предположение находит подтверждение и в ряде других работ [3, 4 – 10], согласно которым стабилизация докритических зародышей новой фазы происходит из-за выделения на их поверхности поверхностно-активных веществ (ПАВ), следы которых всегда присутствуют в реальных системах, не подвергнутых специальной обработке. Наличие в жидкостях ПАВ не снимает вопрос о стабильности докритических зародышей, т. к. примесь ПАВ может лишь уменьшить скорость их растворения, но не предотвратить полного исчезновения. Вместе с тем, в работах [5, 6, 11] показано, что стабилизация может происходить за счет электрических зарядов на поверхности зародышей. При этом важно учесть совместное действие поверхностного натяжения и электрического заряда.

Цель работы

Разработка математической модели зародышеобразования новой фазы газожидкостной смеси (суть – фазового перехода в системе «газ–жидкость») с учетом зависимости поверхностного натяжения от радиуса кривизны поверхности разрыва и электрического заряда, равномерно распределенного по поверхности сферического микропузырька идеального газа.

Основная часть

Энергия, необходимая для образования одной молекулы газа из жидкости, с учетом равномерно распределенного по поверхности зародыша электрического заряда может быть определена следующим образом [1, 6]:

$$\Delta u = 4\pi \frac{d(\sigma(r)r^2)}{dN} + \frac{d}{dN} \left[\frac{(ze)^2}{4\pi \varepsilon \varepsilon_0 r} \right], \quad (1)$$

где r – радиус зародыша; N – число молекул в зародыше; e – элементарный электрический заряд; ε – диэлектрическая проницаемость; ε_0 – электрическая постоянная; $\sigma(r)$ – поверхностное натяжение; z – коэффициент, учитывающий электрический заряд на поверхности зародыша.

Обозначив объем молекулы газа через v_B , получим:

$$N = (4\pi r^2)/(3v_B). \quad (2)$$

Поверхностное натяжение зародыша (на основе уравнения Толмера [5]) будет иметь вид:

$$\sigma(r) = \sigma_0/[1 + (2\delta/r)]$$

или после упрощения:

$$\sigma(r) = \sigma_0[1 - (2\delta/r)], \quad (3)$$

где σ_0 – поверхностное натяжение плоской границы раздела;
 δ – толщина приповерхностной прослойки зародыша.

Выражение (3) справедливо только при $r > \delta$.

При $r \sim \delta$ зависимость $\sigma = f(r)$ будет линейна:

$$\sigma(r) = k_0 r, \quad (4)$$

где k_0 – коэффициент пропорциональности.

Очевидно, что в начале зародышеобразования, когда радиус зародыша еще мал, с учетом (2) и (4) в выражении (1), будем иметь

$$\Delta u = 3k_0 v_B - \frac{v_B (ze)^2}{16\pi^2 \varepsilon \varepsilon_0 r^4}, \quad (5)$$

согласно закону Больцмана $P = P_c \exp(-\Delta u/kT)$. Тогда из (5) будем иметь:

$$\ln(P/P_c) = -\frac{3k_0 v_B}{kT} + \frac{v_B (ze)^2}{16\pi^2 \varepsilon \varepsilon_0 r^4}. \quad (6)$$

где P – давление над зародышем; P_c – равновесное давление над плоской поверхностью (или давление насыщения); k – постоянная Больцмана; T – абсолютная температура.

Второй член в уравнении (6) существенно меняет характер зависимости, и при $\ln(P/P_c) = 0$ радиус зародыша r имеет ненулевое значение.

При $r > \delta$ из (1) с учетом (2) и (3) получим:

$$\ln(P/P_c) = -\frac{3\sigma_0 v_B}{kTr} \left(1 - \frac{\delta}{r}\right) + \frac{v_B (ze)^2}{16\pi^2 \varepsilon \varepsilon_0 r^4 kT}. \quad (7)$$

Если учесть, что $(\delta/r) \ll 1$, то из (7) получим:

$$\ln(P/P_c) = -\frac{2\sigma_0 v_B}{kTr} \left(1 - \frac{\delta}{r}\right) + \frac{v_B (ze)^2}{16\pi^2 \varepsilon \varepsilon_0 r^4 kT}. \quad (8)$$

Механическое равновесие зародыша с учетом влияния электрического заряда определяется следующим уравнением:

$$P_c = P + \frac{2\sigma(r)}{r} - \frac{(ze)^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 r^4} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right). \quad (9)$$

При давлении P выше давления насыщения P_c газа в жидкости начинают образовываться микрзародыши (микробузырьки), и основной вклад в это вносит поверхностный электрический заряд.

Пороговый радиус газового пузырька, при котором начинается устойчивое зародышеобразование в случае $r \approx \delta$, может быть найден из выражения (6):

$$r^* = \sqrt[4]{\frac{(ze)^2}{48k_0 \pi^2 \varepsilon \varepsilon_0}}. \quad (10)$$

При $r \gg \delta$ пороговый радиус может быть определен из выражения (8):

$$r^* = \sqrt[4]{\frac{(ze)^2}{32\sigma_o\pi^2\varepsilon\varepsilon_o}} \quad (11)$$

Размеры стабильных докритических зародышей составляют в среднем (1...100) нм.

Наличие электрического заряда на поверхности зародыша практически соответствует уменьшению δ поверхностного натяжения и, таким образом, образованию зародышей газовой фазы при давлении P выше давления насыщения жидкости газом P_c , что согласуется с экспериментальными исследованиями (рис. 1).

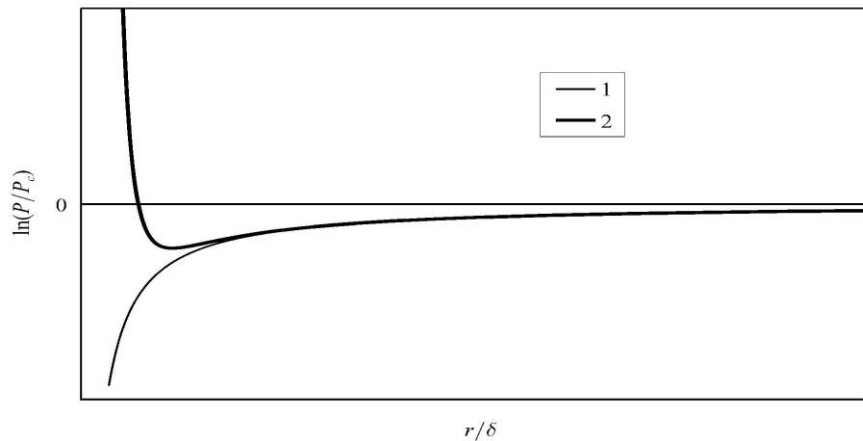


Рис. 1. Образование зародышей в газовой фазе 1 – для $\delta \leq 0,01\text{н/м}^2$; 2 – для $\delta > 0,01\text{н/м}^2$

Вычислительный эксперимент по стационарной фильтрации газированной жидкости в докритической области показал, что при уменьшении объемной вязкости газированной жидкости вблизи давления насыщения P_c расход жидкости возрастает в (2...3) раза.

Действительно, принимая по данным работы [1] $\eta = \eta_0 \{1 - D \exp[-\alpha(P - P_c)]\}$ (где $P \geq P_c$, $D = 0,1$ и $\alpha = 0,37 \times 10^{-6} \text{ 1/Па}$ – постоянные коэффициенты, η и η_0 – соответственно вязкость газированной жидкости и растворителя) и решая уравнение Дарси [7, 12] с учетом указанного уравнения и уравнения неразрывности несжимаемой жидкости для относительного расхода $Q_1 = Q/Q_0$ (где Q_0 – расход несжимаемой жидкости по Дарси), получим

$$Q_1 = 1 + \frac{1}{\alpha \Delta P} \ln \left| \frac{1 - D \exp[-\alpha(P_0 - P_c)]}{1 - D \exp[-\alpha(P_e - P_c)]} \right| \quad (12)$$

где P_0 и P_e – соответственно давление на входе и выходе из пористой среды. Подставляя в последнее выражение значения параметров, которые, согласно [1] дают максимальное увеличение расхода ($P_e = P_c$, $P_0 - P_c > 0$), можно получить теоретическое подтверждение оговоренного выше вычислительного эксперимента.

Особый интерес при моделировании гетерогенных систем имеет учет влияния неньютоновских свойств жидкости. Данный аспект исследуем на примере стационарной фильтрации газированных полимерных растворов. Условиями проявления неньютоновских свойств фильтрующейся жидкости вычислительным

экспериментом по формуле (12) были определены следующие значения исходных величин: $P_0 = (1,2...1,3)P_c$, $P_e = (1,1...3,0)P_c$. При этом массовая концентрация ПАВ должна составлять от 0,01% до 0,02%. Результаты вычислительного эксперимента оформлены в виде зависимости безразмерного расхода жидкости $Q_1 = Q/Q_0$ (Q – расход жидкости на уровне среднего давления, Q_0 — расход жидкости для дегазированного раствора) от уровня среднего давления ($P_{cp} = P/P_c$), которые представлены на рис. 2. Как видно из рис. 2, при обоих значениях ПАВ зависимость расхода жидкости от уровня давления имеет немонотонный характер, причем экстремальное значение расхода жидкости наблюдается вблизи давления насыщения, и с увеличением концентрации ПАВ рост расхода жидкости уменьшается.

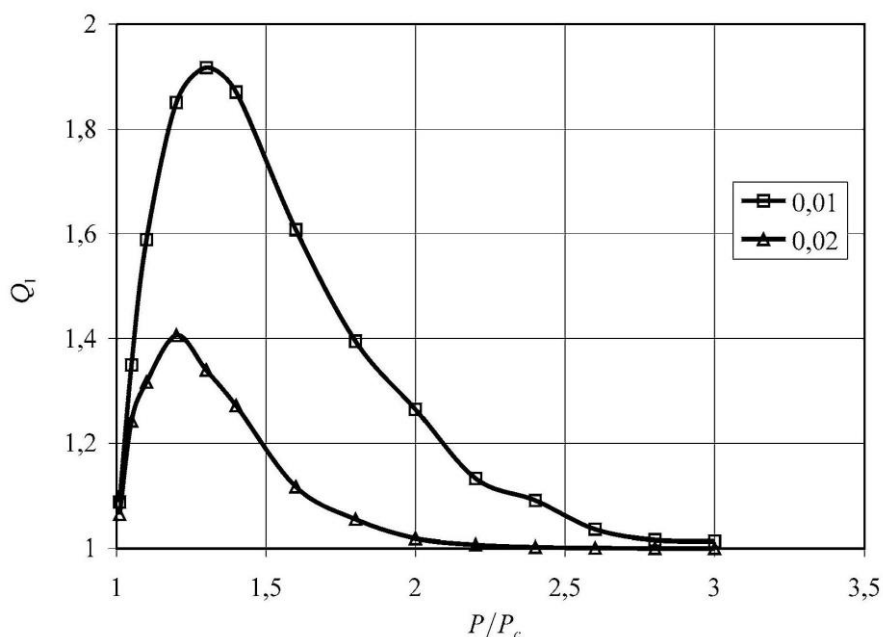


Рис. 2. Зависимость безразмерного расхода Q_1 от уровня среднего давления P_{cp}

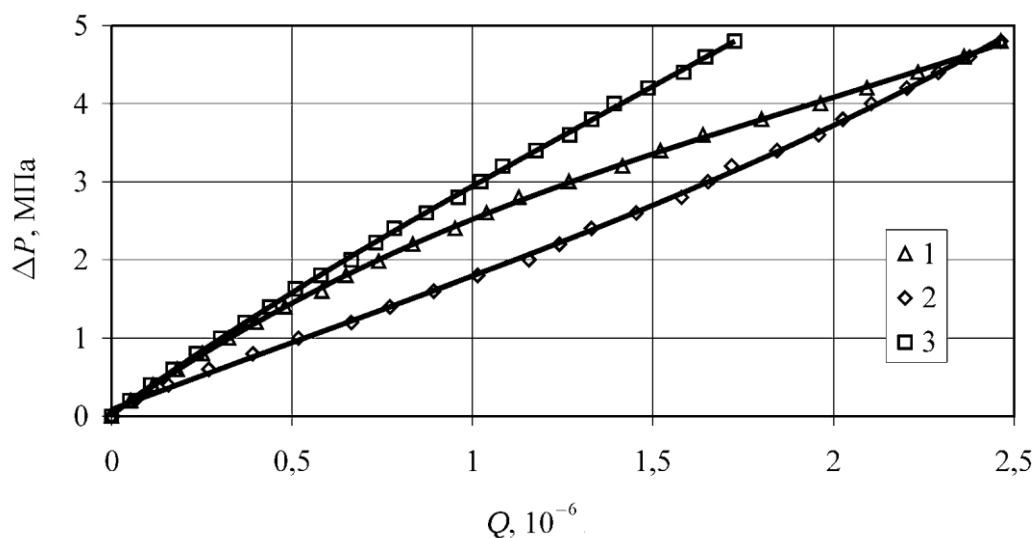


Рис. 3. Зависимость перепада давления ΔP от безразмерного расхода Q_1

На рис. 3 показана зависимость перепада давления ΔP от расхода Q для газированных полимерных растворов.

Вычислительный эксперимент проводился для случаев: $P_0 = \text{const}$ ($P_0 = 7,8$ МПа, а P_e изменялось в диапазоне $P_e = (3,1 \dots 7,7)$ МПа) и $P_e = \text{const}$ ($P_e = 3,1$ МПа, а P_0 изменялось в диапазоне $P_0 = (3,01 \dots 7,8)$ МПа) Как видно из графиков, при различных сценариях изменения перепада давления ($P_0 = \text{const}$ или $P_e = \text{const}$) возможна значительная модификация характера течения, а именно, происходит смена псевдопластического течения на дилатантное, причем практически во всем исследуемом интервале давлений. При концентрации ПАВ $C = 0,02\%$ изменение характера течения менее заметно.

Выводы

Алгоритмической основой создания современных систем управления в нефтедобывающей промышленности могут рассматриваться полученные и исследованные зависимости $Q_1(\Delta P)$ и $\Delta P(Q)$, отражающие поведение системы «безразмерный расход — перепад давления». Указанные зависимости в данном случае представляют собой ММ изучаемых физических процессов. Полученные и исследованные зависимости $Q_1(\Delta P)$ и $\Delta P(Q)$, отражающие поведение системы «безразмерный расход — перепад давления», показывают комбинированный характер реологического поведения фильтрующейся жидкости. При этом происходит смена псевдопластического (суть-аномального) течения на дилатантный (т. е. близкий к ньютоновскому, подчиняющемуся закону Дарси). Однако, при концентрации ПАВ $C > 0,01\%$ участок псевдопластического течения увеличивается, а дилатансия менее выражена, т.к. увеличение расхода фильтрующейся жидкости вблизи давления насыщения в данном случае значительно больше.

Список литературы

1. Френкель, Я.И. Кинетическая теория жидкостей / Я.И. Френкель — Л.: Наука, 1975. — 592с.
2. Зельдович, Я.Б. Избранные труды. Химическая физика и гидродинамика / Я.Б. Зельдович — М.: Наука, 1984. — С. 107—122.
3. Бувевич, Ю.А. О докритическом образовании зародышей в жидкости с поверхностно-активным веществом (ПАВ) / Ю.А. Бувевич // Инженерно-физический журнал. — 1987. — Т. 52. — № 5. — С. 394—402.
4. Сиротюк, М.Г. Стабилизация пузырьков в воде / М.Г. Сиротюк // Акустический журнал. — 1970. — Т. 16. — № 4. — С. 567—569.
5. Акуличев, В.А. Гидратация ионов и кавитационная прочность воды / В.А. Акуличев // Акустический журнал. — 1996. — Т. 61. — № 2. — С. 160—165.
6. Асхабов, А.М. Кластеры «скрытой» фазы — кавитроны и зародышеобразование / А. М. Асхабов, М.А. Рязанов // Доклады РАН. — 1998. — Т. 362. — № 5. — С. 630—633.
7. Бернадинер, М.Г. Гидродинамическая теория фильтрации аномальных жидкостей / М. Г. Бернадинер, В.М. Ентов. — М.: Наука, 1975. — 199 с.
8. Quintard, M. Two phase flow in heterogeneous porous media: the method of large-scale averaging / M. Quintard, S. Whitaker // Transport in porous media. — 1988. — № 3. — P 357—413.
9. Saez A. The effective homogeneous behavior of homogeneous porous media // A. Saez, C.J. Otero, I. Rusinek // Transport in porous media. — 1989. — № 4. — P 212 — 238.

10. Chauveteau, G. Rodlike Polymer Solution Flow Through Fines Pores: Influence of Pole Size on Rheological Behavior / G. Chauveteau // Journal of the Rheological. — 1999. — V. 26 (2). — P. 111—142.
11. Enevoldsen, J. Pressure Drop Throgh Gravel Packs / J. Enevoldsen, H.K. Rasmusen // Annual Transactions of the Nordic Rheology Society. — 1995. — Vol. 3. — P. 45—47.
12. Bayada, G. Inequations variationnelles elliptiques avec conditions aux limites periodiques // J. Anal. Math. — 1978.— Vol. 34.— P. 47 — 53.

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПЛІНУ ГАЗОВАНОЇ РІДИНИ У ДОКРИТИЧНІЙ ОБЛАСТІ ГЕТЕРОГЕННИХ СИСТЕМ

В.С. Савіч

Одеський національний політехнічний університет,
просп. Шевченко, 1, Одеса, 65044, Україна; e-mail: savichsp@gmail.com

Запропоновано математичну модель утворення зародків для фазового переходу системи «газ — рідина, яка фільтрується» з урахуванням залежності поверхневого натягу від радіусу кривизни поверхні розриву та електричного заряду. Досліджено поведінку газованої рідини у докритичній області та виявлено зони псевдопластичного (аномального) та ділатантного (близького до ньютонівського) плинину, а також умов фільтрації, що призводять до вказаних форм плинину.

Ключові слова: математична модель, фільтрація у поровому середовищі, гетерогенні пластові системи, псевдо пластичний плин, ділатантний плин.

MATHEMATICAL DESIGN OF FLOW OF THE CARBONATED LIQUID IS IN VORCRITICAL OF AREA OF HETEROGENEOUS SYSTEMS

V. Savich

Odesa National Polytechnic University,
1 Shevchenko Str., Odesa, 65044, Ukraine; e-mail: savichsp@gmail.com

The mathematical model of embryo creation offers for the phase transition of the system «gas — filter-passing liquid» taking into account dependence of surface-tension on the radius of curvature of surface of break and electric charge. Behavior of the carbonated liquid is investigational in a vorcritical area and educed zone of pseudoplastic (anomalous) and dilatant (near to newtonian) flows, and also terms filtrations resulting in the indicated forms of flows.

Keywords: mathematical model, filtration in a porous environment, heterogeneous stratal

ПОШУК ОПТИМАЛЬНОГО РІШЕННЯ ЗВОРотної ЗАДАчі ЕКОНОмічного МЕНЕДЖМЕНТу ІНФОРМАційної БЕЗПЕКИ

Є.Г. Левченко, Д.І. Рабчун

Національний авіаційний університет,
просп. Космонавта Комарова, 1, Київ, 03058, Україна; e-mail: professor_va@ukr.net

Першим кроком до синтезу систем захисту інформації є рішення зворотної задачі, коли по заданим показникам системи знаходять необхідну кількість ресурсів і їх розподіл між об'єктами. Розглянуто інформаційну систему, котра містить два об'єкти і може функціонувати в двох режимах протистояння: однонаправленому, коли кожна сторона захищає свою інформацію, і двонаправленому, коли кожна з сторін захищає свою інформацію і прагне здобути інформацію суперника. Рішення зворотної задачі через її складність зводять до розв'язку прямої і шляхом перебору, використовуючи метод Белмана, знаходять необхідні величини. Враховуючи невизначеність умов протистояння в інформаційній сфері, необхідно знайти таке рішення, котре забезпечує задані показники при будь-яких діях суперника. В економічній теорії така ситуація відома як рівновага за Нешем. При геометричній інтерпретації результатів вона зображується сідловою точкою на просторовій фігурі, котра представляє цільову функцію в залежності від ресурсів обох сторін. Знайдено розв'язок зворотної задачі в інтервалах існування сідлової точки при різних значеннях параметрів системи. Встановлено вимоги до параметрів, виконання яких дозволяє одержати оптимальний результат.

Ключові слова: інформаційна безпека, математична модель, розподіл ресурсів, сідлова точка.

Вступ

Розвиток інформаційної сфери відображається в багатьох показниках: зростають обсяги і вартість інформації, частота і витонченість нападів, вартість втрат від витоку інформації та, відповідно, складність та вартість захисних структур. Як наслідок — зростають вимоги до ефективності використання ресурсів захисту, котра визначає, зрештою, технічні та економічні показники систем захисту інформації. Оптимізація кількості та розподілу ресурсів захисту являє собою досить серйозну задачу, труднощі рішення котрої пояснюються низкою причин: складність систем захисту, невизначеність умов протистояння, неможливість точного визначення параметрів і функціональних залежностей, котрі характеризують вразливість об'єктів захисту. Невизначеність умов протистояння в економічній сфері полягає в тому, що невідомі наміри, а іноді і дії суперника – націленість атак, кількість його ресурсів і їх розподіл між об'єктами. Розгляд всіх можливих ситуацій при пошуку оптимальної стратегії дії захисту приводить до значного зростання кількості розрахункових варіантів і, зрештою, не дає відповіді на поставлене питання. Часто ці труднощі обходять, оцінюючи імовірності окремих стратегій нападу і переходячи до пошуку рішення в умовах ризику [1]. Суб'єктивізм такого підходу в значній мірі знецінює отримані результати. Бажано знайти таке рішення, котре забезпечує певний результат за будь-яких дій суперника, що особливо важливо в умовах динамічного протистояння, коли умови протистояння

змінюються з часом. При графічному поданні результатів ця ситуація відображається сідловою точкою на просторовій фігурі, що зображає цільову функцію в залежності від ресурсів нападу і захисту [2].

Поряд з розв'язком прямої задачі, в якій по заданим ресурсам сторін знаходять показники протистояння, важливе прикладне значення має рішення зворотної задачі, коли по заданим показникам потрібно знайти необхідну кількість ресурсів і їх розподіл між об'єктами. Рішення цієї задачі відкриває шлях до синтезу систем захисту, котрий дозволяє визначити необхідні засоби для кожного з об'єктів.

Мета роботи – визначення кількості ресурсів захисту і їх розподілу між об'єктами, необхідних для досягнення заданих показників в умовах динамічного інформаційного протистояння.

Методика розрахунків і результати

При побудові системи захисту інформації необхідно врахувати природу об'єктів (фізичну чи електронну), їх кількість, параметри і характеристики, зокрема, початкову і динамічну вразливість, розподіл інформації по об'єктах, ймовірність нападу, кількість ресурсів, направлених на кожний з об'єктів, а також умови протистояння (однонаправлене чи різнонаправлене) і режим протистояння (статичний чи динамічний). В залежності від цих даних формується структура системи захисту – однорівнева чи багаторівнева, з послідовним, паралельним чи послідовно-паралельним розташуванням засобів захисту, а також типи цих засобів з врахуванням обмеження на їх загальну вартість, знайдену в результаті рішення оптимізаційної задачі.

При постановці оптимізаційної задачі першим кроком є визначення величини, яка підлягає оптимізації, а також форми цільової функції і критерію оптимальності. При розв'язку прямої задачі метою пошуку можуть бути:

1. Мінімум втрат інформації або сумарних втрат, котрі об'єднують втрати інформації і витрати на її захист;
2. Максимум прибутку від інвестиції в захист інформації або їх рентабельності.

Можливий також багатокритеріальний підхід, при якому цільова функція містить наведені величини з певними ваговими коефіцієнтами.

При розв'язку зворотної задачі задають граничні значення одного або декількох зазначених показників і визначають необхідну кількість ресурсів захисту і їх оптимальний розподіл між об'єктами. Критерієм оптимальності є досягнення кращих значень інших показників або їх комбінації. Прикладом такого підходу є задання гранично допустимого значення втрат інформації і визначення необхідної кількості ресурсів захисту та одночасно розподілу цих ресурсів між об'єктами, котрий відповідає мінімуму загальних втрат.

Слід зазначити, що рішення зворотної задачі через її складність часто зводять до прямої задачі і шляхом перебору одержаних розв'язків знаходять необхідний варіант. Оскільки виконання поставлених в умові обмежень необхідно забезпечити при будь-яких діях суперника, то бажано, щоб розв'язок знаходився в сідловій точці.

При всіх підходах до розв'язку прямої задачі базовою величиною, котра входить в усі варіанти цільової функції, є кількість втрат від витоку інформації. Виходячи з важливості цього показника формуємо цільову функцію як частку $i(x, y)$ втраченої інформації в системі і подамо її у вигляді [3]:

$$i(x, y) = \sum_{k=1}^l i_k(x, y) = \sum_{k=1}^l g_k \cdot p_k \cdot q_k(x, y) \cdot f_k(x, y), \quad (1)$$

де x та y — вартість ресурсів нападу і, відповідно, захисту, $\sum_{k=1}^l x_k = X$; $\sum_{k=1}^l y_k = Y$;

$k = \overline{1, l}$ – номер об'єкта;

g_k – частка загального обсягу інформації, що містить k -й об'єкт, $\sum_{k=1}^l g_k = 1$;

p_k – імовірність нападу на об'єкт;

$q_k(x, y)$ – імовірність виділення ресурсів x при заданому значенні y ;

$f_k(x, y)$ – частка втраченої інформації на об'єкті.

Величини, що входять в (1) – відносні: $i(x, y)$, $i_k(x, y)$, g_k віднесені до загальної вартості інформації, $f_k(x, y)$ – до вартості інформації на об'єкті. В позначеннях незалежних змінних індекси опущені.

Відповідно до моделі [3], вважаємо, що величина $f_k(x, y)$, котра виражає динамічну вразливість об'єкта, залежить від співвідношення ресурсів нападу і захисту. Крім того, прийmemo, що при відсутності інвестицій у захист ($y = 0$) напад вилучає всю інформацію, котру покладемо рівною одиниці. Ще одна умова, яка накладається на функцію $f_k(x, y)$: при $x/y \rightarrow 0$ $f_k(x, y) \rightarrow 0$, при $x/y \rightarrow \infty$ $f_k(x, y) \rightarrow 1$. Найпростішою залежністю, котра задовольняє зазначеним умовам, є дробово-степенева функція:

$$f_k(x, y) = \frac{(x/y)^{n_k}}{(x/y)^{n_k} + c_k}, \quad (2)$$

де параметри n_k і c_k визначають форму і крутизну залежностей.

Для ілюстрації методики розглянемо спрощену структуру інформаційної системи (рис.1,а), котра містить два об'єкти g_1, g_2 , захищені індивідуальними перешкодами f_1 та f_2 (назви об'єктів одночасно визначають кількість інформації на них, а назви перешкод — вразливості об'єктів).

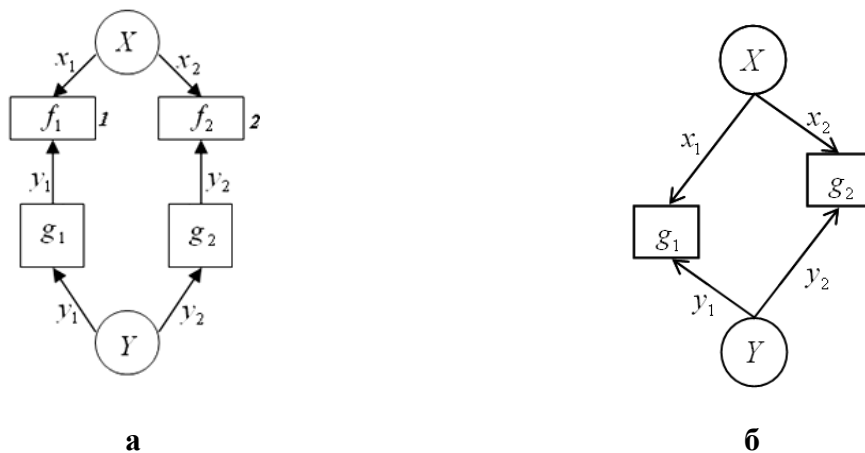


Рис. 1. Схеми різних форм протистояння: а – однонаправленого; б – різнонаправленого

Параметри системи вважаємо відомими. Вразливості об'єктів на першому етапі описуються дробово-лінійними функціями: $n_1 = n_2 = 1$. Параметри c_k становлять: $c_1 = 32$, $c_2 = 128$. Розподіл інформації по об'єктах: $g_1 = 0.4$, $g_2 = 0.6$, що відповідає логічному рішенню – більша частина інформації розташована на об'єкті з меншою

вразливістю. Загальну кількість ресурсів нападу вважаємо сталою і задаємо рівною $X = 0.1$ (10% від вартості інформації).

Умову зворотної задачі сформулюємо наступним чином. Втрати інформації не повинні перевищувати $i_{sp} = 0.05$, загальні втрати – $S_{sp} = (i + Y)_{sp} = 0.09$. Необхідно знайти кількість ресурсів захисту Y і їх оптимальний розподіл $\{y_k^0\}$ по об'єктах, котрий забезпечує досягнення мінімального значення S_{min} при виконанні заданих обмежень і відповідає сідловій точці.

Розв'язок зворотної задачі зводимо до розв'язку прямої. Маючи на меті пошук сідлової точки, зосереджуємо увагу на таких складових цільової функції, як вразливість об'єктів $f_k(x, y)$ і розподіл інформації $\{g_k\}$. Для цього покладемо $p_k = 1$, $q_k(x, y) = 1$. Цільова функція при сформульованих умовах приймає вигляд:

$$(x, y) = i_1(x, y) + i_2(x, y) = 0.4 \frac{x_1/y_1}{x_1/y_1 + 32} + 0.6 \frac{x_2/y_2}{x_2/y_2 + 128}. \quad (3)$$

Пошук сідлової точки ведемо шляхом почергової оптимізації розподілу ресурсів нападу і захисту, при чому ходи суперника вважаються відомими. Ця математична процедура відображає позиційну гру з відкритою інформацією. При відсутності сідлової точки ця процедура перетворюється в нескінченний циклічний процес, при її наявності досягається стаціонарний стан, котрий влаштовує обидві сторони. В системі (рис.1,а) при дробово-лінійній формі функцій вразливості сідлова точка існує при всіх значеннях параметрів [4].

Оптимальний розподіл ресурсів захисту при фіксованому розподілі ресурсів нападу $X = 0.1$ знаходимо з умови $S(y_1, y_2) \rightarrow \min$ при виконанні введених граничних обмежень на величини i , S . Результати розрахунків одержуємо з допомогою програмного комплексу MatLab. На рис.2, а, б представлено результати при дробово-лінійних функціях вразливості і цільовій функції у формі (3), на рис.2, в, г — при дробово-нелінійній функції вразливості одного з об'єктів і цільовій функції у вигляді:

$$i(x, y) = 0.4 \frac{(x_1/y_1)^2}{(x_1/y_1)^2 + 256} + 0.6 \frac{(x_2/y_2)^2}{(x_2/y_2)^2 + 128}.$$

Інтервал значень Y , в якому виконана умова $i \leq i_{sp}$, на рис.2, а обмежений зліва точкою $Y_{sp}^{(1)} = 0.29$ (це точка А, що відповідає значенню $i_{sp} = 0.05$), справа – необмежений. Інтервал, який визначається умовою $S < S_{sp}$, де $S_{sp} = 0.09$, обмежується точками В і С. Перший із зазначених інтервалів позначимо правою косою штриховою, другий – лівою.

Перетин інтервалів, що представляє зону виконання обох граничних умов, обмежений точками А і С. Точка М, яка відповідає мінімуму залежності $S(Y)$, знаходиться всередині цієї зони і може бути прийнята за робочу. Кількість ресурсів захисту в точці М становить $Y = 0.04$, а оптимальний розподіл цих ресурсів за розрахунками: $y_1^0 = 0.024$, $y_2^0 = 0.016$. В точці М: $i = 0.04$, $S = 0.08$. Значення $Y = 0.04$ в робочій точці суттєво перевищує граничне значення $Y_{sp}^{(1)} = 0.029$, що створює певний запас надійності при реалізації режиму сідлової точки. Ще одна умова, яка висувається для забезпечення виконання заданих умов – незначне відхилення відношення y_1^0/y_2^0 в робочій зоні АС, котра займає інтервал $Y = 0.029..0.066$, від його оптимального

значення в робочій точці М. Ця умова виконується: на рис.2, б згадане відношення залишається незмінним і становить $y_1^0/y_2^0 = 1.5$.

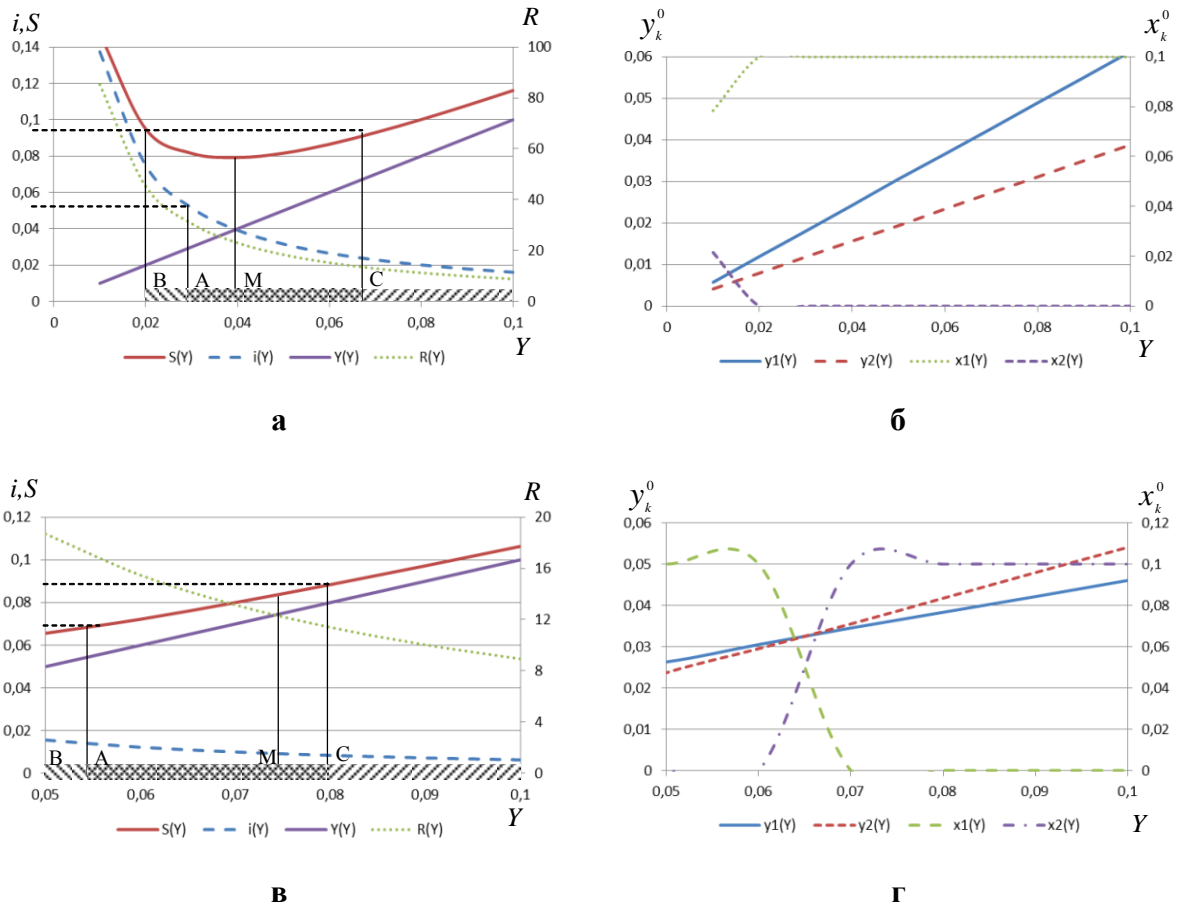


Рис. 2. Показники системи (рис.1, а) в сідлових точках при $g_1 = 0.4$, $g_2 = 0.6$: а – $n_1 = n_2 = 1$; $c_1 = 32$, $c_2 = 128$; б – $n_1 = n_2 = 1$; $c_1 = 32$, $c_2 = 128$; в – $n_1 = 2; n_2 = 1$, $c_1 = 256$, $c_2 = 128$; г – $n_1 = 2; n_2 = 1$, $c_1 = 256$, $n_2 = 128$

На рис.2, 3 наведено також залежності рентабельності $R(Y)$ інвестицій в захист інформації від розміру Y інвестицій. Рентабельність визначається як

$$R(Y) = \frac{b(Y)}{Y} = \frac{r(Y) - Y}{Y} = \frac{1 - i(Y) - Y}{Y},$$

де $r(Y)$ — дохід, $b(Y)$ — прибуток від внесення інвестицій. Зі зростанням витрат рентабельність зменшується, оскільки величина Y зростає швидше, ніж прибуток $b(Y)$. Звичайно, можлива постановка задачі, при якій обмеження встановлюється на величину рентабельності замість обмеження на $i(Y)$ чи $S(Y)$ або додатково до них.

Якщо хоч одна із залежностей $f_k(x, y)$ описується дробово-нелінійною функцією, то інтервал ΔY існування сідлової точки стає обмеженим [4]. Ширина інтервалу ΔY при сталому значенні X залежить від параметрів n_k , c_k функцій вразливості $f_k(x, y)$, а також від розподілу $\{g_k\}$. Може трапитись так, що мінімум залежності $S(Y)$ перебуває за межами цього інтервалу. Таку ситуацію спостерігаємо на рис.2 (в, г), де інтервал існування сідлової точки становить $\Delta Y = 0.05..0.1$. При рішенні

зворотної задачі поставимо умови: втрати інформації не повинні перевищувати $i_{sp} = 0.015$ (точка А, що відповідає значенню $Y = 0.055$), загальні втрати – $S_{sp} = 0.09$ (точка С з $Y = 0.08$). Інтервал АС, в якому виконується обидві умови, обмежений зліва першою умовою, а справа – другою і визначає зону допустимих значень $Y = 0.055..0.08$. Проте точка А, в котрій досягається найменше в інтервалі АС значення S , не може бути обрана робочою точкою, оскільки в ній не виконується умова забезпечення надійності реалізації заданих обмежень: по-перше, робоча точка повинна бути на деякому віддаленні від границі зони допустимих значень, по-друге, в околі робочої точки відношення y_1^0/y_2^0 не повинно зазнавати кардинальних змін. Тому при виборі робочої точки слід дещо відступити від границі, а також врахувати залежності рис.2, г.

Зазначимо, що на рис.2, г порівняно з рис.2, б суттєво відрізняється хід розподілів ресурсів $\{x_k^0\}$, $\{y_k^0\}$ при зміні Y . На рис.2, б в робочій зоні всі ресурси нападника зосереджені на першому об'єкті ($x_1^0 = 0.1, x_2^0 = 0$), а відношення y_1^0/y_2^0 залишається незмінним і більшим одиниці. На рис.2, г така ситуація спостерігається лише при $Y \leq 0.06$. В інтервалі $0.06 < Y < 0.07$ відбувається перекачка всіх ресурсів нападу на другий об'єкт, а для ресурсів захисту спостерігаємо їх поступовий перерозподіл і при $Y > 0.065$ маємо y_1^0/y_2^0 . З огляду на залежності рис.2, г робочу точку М обираємо при значенні $Y = 0.075$ (рис.2, в). В цій точці $i = 0.01$, $S = 0.082$, $y_1^0 = 0.036$, $y_2^0 = 0.039$. Зазначимо, що в зоні АС залежності $i(Y)$ та $S(Y)$ мають незначний нахил, і перехід від точки А до точки М не приведе до суттєвої зміни цих величин і погіршення показників.

Пояснимо вибір параметрів n_k , c_k в наших розрахунках. Параметр n_k виражає нелінійність функції вразливості $f_k(x, y)$, котра особливо проявляється в початковій області значень x/y . На рис.2, а, б функції вразливості для обох об'єктів — дробово-лінійні, на рис.2, в, г одна з цих функцій — дробово-квадратична. Параметр c_k впливає на висоту підйому залежності $f_k(x, y)$ над віссю абсцис. Вплив обох параметрів можна оцінити, порівнюючи значення $f_k(x, y)$ при одних і тих же значеннях x/y . Наприклад, при $x/y = 1$ і $n_k = 1$ функція (2) при $c = 32$ дає $f(x, y) = 0.03$ (3% втрат інформації), а при $c = 128$ — $f(x, y) = 0.08$ (0.8% втрат). Значення c_k в (3) обрані з умови забезпечення існування сідлової точки.

При ускладненні системи інформаційного протистояння, зокрема при переході до різнонаправлених дій кожної із сторін стають складнішими й умови досягнення режиму сідлової точки. На рис.1, б зображена система, в котрій сторона з ресурсами Y захищає інформацію на своєму об'єкті g_1 і прагне здобути інформацію суперника з об'єкту g_2 , а сторона з ресурсами X захищає інформацію g_2 і прагне здобути інформацію g_1 . В системі з двох об'єктів (рис.1, б) навіть при використанні дробово-лінійних функцій вразливості інтервал ΔY існування сідлової точки стає обмеженим, а режим існування сідлової точки досягається лише при певних значеннях параметрів, зокрема при рівномірному розподілі інформації між об'єктами: $g_1 = g_2$. Значення c_k впливають на розташування і ширину інтервалу ΔY . В наших розрахунках функції вразливостей мають вигляд:

$$f_1(x, y) = \frac{x/y}{x/y + 32}; \quad f_2(x, y) = \frac{x/y}{x/y + 64}.$$

Використані на рис.3 значення $c_1 = 32$, $c_2 = 64$ обрані з умови досягнення найбільшої ширини інтервалу: $\Delta Y = 0.12...0.17$. При двонаправленому протистоянні

втрати інформації на об'єктах захисту відображають лише одну частину протистояння і не можуть бути повноцінним показником. Таким показником для кожної з сторін є сумарний дохід $r(x, y)$, який включає дохід $i(x, y)$ від здобуття інформації суперника і дохід $j(x, y)$ від інвестицій в захист власної інформації, котрий визначаємо як різницю втрат при відсутності інвестицій і при їх внесенні:

$$r_1(x, y) = j_1(x, y) + i_2(x, y) = g_1[1 - f_1(x, y)] + g_2 f_2(x, y), \quad (4)$$

$$r_2(x, y) = i_1(x, y) + j_2(x, y) = g_1 f_1(x, y) + g_2 [f_2(x, y)]. \quad (5)$$

В останніх виразах $j_k(x, y)$ — частка загальної інформації g , захищена k -ю стороною на своєму об'єкті (ми покладемо $g = g_1 + g_2 = 1$), $i_k(x, y)$ — частка загальної інформації, здобута на об'єкті суперника. Цільові функції виражають прибутки обох сторін:

$$b_1(x, y) = r_1(x, y) - Y; \quad (6)$$

$$b_2(x, y) = r_2(x, y) - X. \quad (7)$$

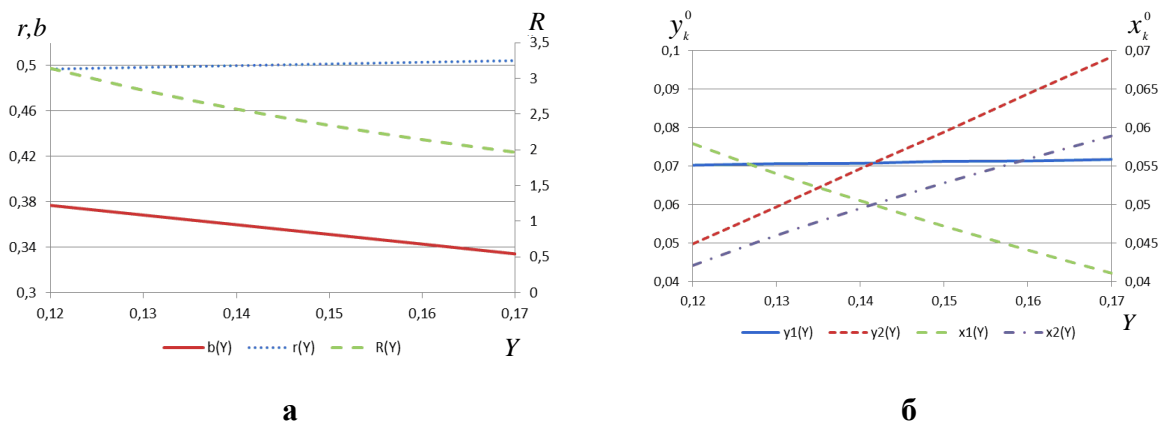


Рис. 3. Показники системи (рис.1, б) в сідлових точках при $g_1 = g_2 = 0.5$; $c_1 = 32$, $c_2 = 64$

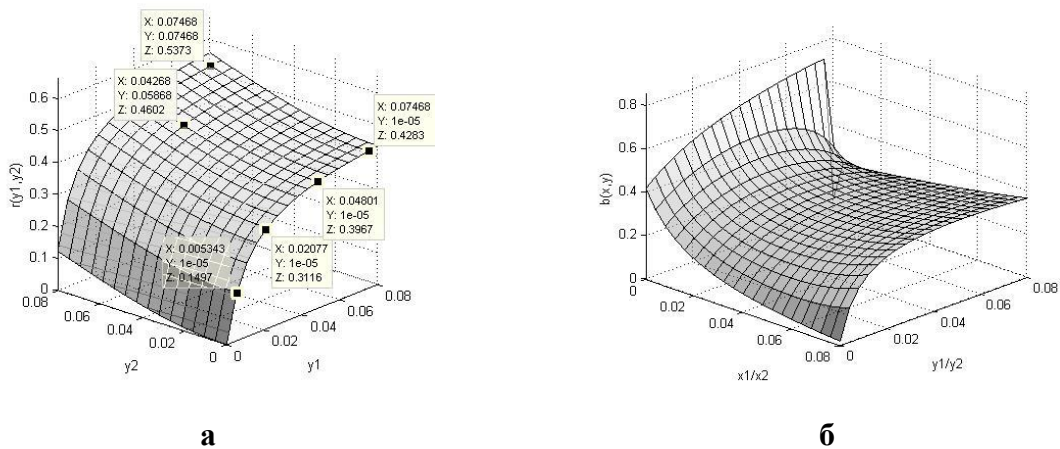


Рис. 4. Оптимальний розв'язок для системи (рис.1,б) в режимі сідлової точки: а – формування оптимального розв'язку при різних значеннях Y ; б – поява сідлової точки при просторовому зображенні цільової функції

Критерієм оптимальності для сторін є досягнення максимуму функцій $b_k(x, y)$ (індекс k означає водночас номер сторони і номер об'єкта). Робочою точкою є точка одночасного досягнення максимуму функцій (6), (7). При геометричному зображенні результатів ця точка є вершиною куполоподібної фігури, побудованої на функціях $b_1(y)$, $b_2(x)$. Точку стаціонарності можна зобразити і у вигляді сідлової точки, перейшовши до двоїстої задачі, в якій необхідно досягти максимуму функції $b_1(y)$ і одночасно мінімуму цільової функції $b_1(x)$, котра визначає збитки другої сторони в результаті протистояння.

Графічну ілюстрацію розв'язку оптимізаційної задачі представлено на рис. 4. Максимальне значення величини $r(y_1, y_2)$ знаходимо в результаті перерізу вертикальної площини, котра проходить через лінію $y_1 + y_2 = Y$, з просторовою фігурою $r(y_1, y_2)$ при різних значеннях Y і сталому значенні X (рис.4, а). Графічне зображення сідлової точки на просторовій фігурі $r(x_1, x_2, y_1, y_2)$ дано на рис.4, б.

Розглядаючи дії сторони Y , задамош пошуком оптимальної кількості ресурсів Y_{opt} . Ситуація з визначенням Y_{opt} схожа на ситуацію рис.2, в: оптимум цільової функції (в нашому випадку – максимум функції $b(Y)$) знаходиться за межами інтервалу існування сідлової точки, і робочу точку належить обирати з умови забезпечення надійності реалізації оптимального режиму. На рис.3,а максимальне значення b_{max} досягається на лівій межі інтервалу ΔY . Робоча точка повинна знаходитись на деякому віддаленні від цієї межі. Друга умова – відсутність різких змін відношення y_1^0/y_2^0 в околі робочої точки — виконується в однаковій степені при всіх значеннях Y , оскільки залежності $y_1^0(Y)$ і $y_2^0(Y)$ близькі до лінійних. Обмеження, які покладались при односторонньому протистоянні на величини $i(Y)$ та $S(Y)$, в нашому випадку замінюють на вимогу досягнення максимальних значень прибутку і рентабельності. Оскільки обидві залежності $b(Y)$ і $R(Y)$ мають спадаючий характер і максимуму досягають на лівій границі інтервалу ΔY в точці $Y = 0.12$, то робочу точку M можна обрати при значенні $y^0 = 0.13$. В цій точці $b = 0.37$, $R = 0.47$, $y_1^0 = 0.07$, $y_2^0 = 0.06$.

Таким чином, для досягнення максимальних значень прибутку і рентабельності при надійній реалізації режиму сідлової точки в системі (рис.1,б) сторона Y повинна виділяти 13% від загальної вартості на обох об'єктах, причому ці ресурси слід розподілити в такій пропорції: 7% – на захист власної інформації на об'єкті g_1 і 6% – на здобуття інформації з об'єкту g_2 . При цьому очікувані значення показників становлять: прибуток – 37% від загальної вартості інформації, рентабельність – 47% по відношенню до витрат на захист.

Як приклад реалізації описаного методу наведемо процес створення DLP системи для схеми (рис.1,а), показники якої зазначені на рис.2,а,б. Відповідно до вихідних умов маємо два об'єкти: два комп'ютери, на яких зберігається і обробляється інформація g_1 та g_2 загальною вартістю $g = g_1 + g_2 = 2762500$ грн. В точці M розподіл ресурсів по об'єктах, як зазначалось, становить $y_1^0 = 0.024$, $y_2^0 = 0.016$, або в абсолютних одиницях $\bar{y}_1^0 = 65500$, $\bar{y}_2^0 = 45000$. Опираючись на отримані дані, оберемо модулі системи (програми-агенти), які будуть встановлені на кожному з комп'ютерів: перший комп'ютер – {Mail-, IM-, Print-, Device-, HTTP-, Monitor-, File-, Programm- Sniffers}; другий комп'ютер – {Mail-, Skype-, HTTP-, FTP- Sniffers}. Використовуючи калькулятор для підрахунку вартості DLP системи, отримаємо: $\bar{y}_1^0 = 65500$ грн., $\bar{y}_2^0 = 45000$ грн. на рік. Сумарна вартість такої системи $Y = 110500$ грн.

Таким чином, при вартості інформації в 2762500 грн., система захисту для двох об'єктів буде коштувати 110500 грн. на рік і забезпечуватиме збереження 96% ($i = 0.04$) інформації навіть при оптимальному розподілі ресурсів нападником.

Слід звернути також увагу на те, що DLP система дає змогу оперативного керування програмами-агентами і «перекидати» їх між об'єктами. Саме за рахунок цієї особливості адміністратори СЗІ можуть в динамічному режимі впливати на вразливості перешкод.

Висновки

При пошуку оптимального рішення зворотної задачі слід зважати на те, що режим сідлової точки, котрий забезпечує деякий гарантований результат при будь-яких діях суперника, існує лише для певних структур і при певних умовах протистояння. Забезпечення існування цього режиму досягається шляхом вибору значень параметрів, котрі визначають вразливість об'єктів. Критерієм вибору робочої точки, котра визначає необхідну кількість ресурсів та їх розподіл між об'єктами, є забезпечення наступних показників: для одностороннього протистояння — мінімум загальних втрат, котрі об'єднують втрати інформації і витрати на її захист, при двосторонньому — максимум загального прибутку, який є сумою прибутку від внесення інвестицій в захист і прибутку від здобуття інформації суперника. Надійність реалізації оптимальної стратегії досягається за рахунок дотримання додаткових вимог: робоча точка повинна знаходитись на деякому віддаленні від межі інтервалу, в якому виконуються зазначені умови, і, крім того, в околі робочої точки не повинні спостерігатись значні зміни оптимального співвідношення ресурсів на об'єктах. Забезпечення наведених умов дозволяє визначити необхідні ресурси, а, зрештою, засоби захисту, що відкриває шлях до побудови оптимальних систем захисту інформації.

Список літератури

1. Глушак, В.В. Синтез структури системи захисту інформації з використанням позиційної гри захисника та зловмисника / В.В. Глушак, О.М. Новіков // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2013. — №2. — С.89–100.
2. Демчишин, М.В. Графоаналітичний метод пошуку сідлової точки в ігрових задачах інформаційної безпеки / М.В. Демчишин, Є.Г. Левченко, Д.І. Рабчун // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2014. — №3. С.48–61
3. Левченко, Є.Г. Оптимізаційні задачі менеджменту інформаційної безпеки / Є.Г. Левченко, А.О. Рабчун // Сучасний захист інформації. — 2010. — №1(1). — С.16–24
4. Левченко, Є.Г. Умови існування сідлової точки в багаторубіжних системах захисту інформації / Є.Г. Левченко, Р.Б. Прус, Д.І. Рабчун // Безпека інформації. — 2013. — №1. — С.70–76.

ПОИСК ОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ЭКОНОМИЧЕСКОГО МЕНЕДЖМЕНТА ИНФОРМАЦИОННОЙ БЕЗОПАСНОСТИ

Є.Г. Левченко, Д.І. Рабчун

Национальный авиационный университет,
просп. Космонавта Комарова, 1, Киев, 03058, Украина; e-mail: professor_va@ukr.net

Первым шагом к синтезу систем защиты информации является решение обратной задачи, когда по заданным показателям системы находят необходимое количество ресурсов и их распределение между объектами. Рассмотрено информационную систему, которая содержит два объекта и может функционировать в двух режимах противостояния: однонаправленном, когда каждая сторона защищает свою информацию, и двунаправленном, когда каждая из сторон защищает свою информацию и стремится получить информацию соперника. Решение обратной задачи ввиду его сложности сводят к решению прямой и путем перебора, используя метод Беллмана, находят необходимые величины. Учитывая неопределенность условий противостояния в информационной сфере, необходимо найти такое решение, которое обеспечивает заданные показатели при любых действиях соперника. В экономической теории такая ситуация известна как равновесие по Нэшу. При геометрической интерпретации результатов она изображается седловой точкой на пространственной фигуре, которая представляет целевую функцию в зависимости от ресурсов обеих сторон. Найдем решение обратной задачи в интервалах существования седловой точки при различных значениях параметров системы. Установлены требования к параметрам, выполнение которых позволяет получить оптимальный результат.

Ключевые слова: информационная безопасность, математическая модель, распределение ресурсов, седловая точка.

SEARCH OF THE OPTIMAL SOLUTION OF THE INVERSE PROBLEM OF ECONOMIC MANAGEMENT OF INFORMATION SECURITY

E.G. Levchenko, D.I. Rabchun

National Aviation University,
prosp. Kosmonavta Komarova, 1, Kyiv, 03058, Ukraine; e-mail: professor_va@ukr.net

The first step to the synthesis of information security systems is a solution of the inverse problem, when the system parameters are given the necessary amount of resources and their distribution between objects. We consider an information system which contains two objects and can work in two modes of confrontation: unidirectional, where each side protects the information and bidirectional when each side protects the information and aims to obtain the opponent's information. The solution of the inverse problem due to its complexity reduces to solving of direct problem with exhaustive search by using the method of Bellman. Taking into account the uncertainty of conditions of confrontation in the information area, it is necessary to find a solution which ensures the performance for any opponent's actions. In economic theory, such situation is known as Nash equilibrium. In a geometric interpretation of the results it is represented by saddle point on spatial figure which represents the objective function depending on the resources of both sides. We find solution of the inverse problem in the intervals of the existence of a saddle point for different values of the system parameters. We established requirements to parameters implementation of which allows you to get the best result.

Keywords: information security, mathematical model, distribution of resources, saddle point.

АНАЛИЗ УСЛОВИЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ СИНТЕЗА ОГРАНИЧЕННОГО СТАБИЛИЗИРУЮЩЕГО УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ С ПОМОЩЬЮ БИЛИНЕЙНЫХ МАТРИЧНЫХ НЕРАВЕНСТВ

Ю.И. Дорофеев

Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт»,
ул. Фрунзе, 21, Харьков, 61002, Украина; e-mail: dorofeev@kpi.kharkiv.edu

Рассматривается задача синтеза стабилизирующего управления запасами в условиях действия неизвестного, но ограниченного внешнего спроса и структурных ограничений на состояния и управляющие воздействия. Управление строится в виде линейной нестационарной обратной связи по сигналу невязки между наличными и страховыми уровнями запаса ресурсов. Для синтеза регулятора требуется решить эквивалентную задачу поиска наименьшего по некоторому критерию инвариантного эллипсоида замкнутой системы, которая сведена к задаче разрешимости системы линейных матричных неравенств. Следующей задачей является оценивание допустимой области в пространстве управляющих воздействий, решение которой получено в терминах разрешимости системы билинейных матричных неравенств. Также получена система билинейных матричных неравенств, решение которой позволяет вычислить весовые матрицы квадратичного функционала, при которых гарантируется максимальная степень подавления влияния внешнего спроса на уровни запаса ресурсов. Рассмотрен численный пример.

Ключевые слова: управление запасами, линейное ограниченное управление, инвариантный эллипсоид, линейное матричное неравенство, билинейное матричное неравенство.

Введение

Проблема управления запасами (УЗ) является одной из наиболее важных в организационном управлении. Запасы разного рода материальных ресурсов возникают почти во всех звеньях системы «производство - хранение - распределение». Модели УЗ описывают широкий круг задач оптимального планирования производственных, транспортных, информационных, финансовых, водохозяйственных, энергетических и других систем [1].

И при дефиците запасов, и при неоправданно высоком их уровне нарушается нормальный ход производства, что приводит к потере прибыли. В результате возникает необходимость в разработке методов математического моделирования управляемых сетей поставок с целью определения оптимальных в определенном смысле уровней запасов, а также построения оптимальных стратегий УЗ.

Широкий класс систем УЗ описывается динамическими сетевыми моделями. Узлы сети задают виды и объемы управляемых запасов, а дуги представляют управляемые и неуправляемые потоки в сети. Управляемые потоки описывают процессы переработки и перераспределения ресурсов между узлами сети и процессы поставок сырья извне. Неуправляемые потоки описывают спрос на ресурсы, который формируется внешними потребителями.

УЗ заключается в определении моментов времени и размеров заказов на их восполнение. Из всего многообразия моделей УЗ можно выделить два основных типа [1]: модель оптимального размера заказа и модель периодической проверки. В первом случае предполагается непрерывный контроль за состоянием запасов и размещение заказов фиксированного размера в моменты времени, определяемые в соответствии с выбранной стратегией. Второй тип модели предполагает проверку уровня запасов через равные промежутки времени и размещение заказа, размер которого определяется в соответствии с выбранной стратегией. Совокупность правил, по которым принимаются подобные решения, называется стратегией УЗ. В данной работе рассматривается модель периодической проверки.

С точки зрения УЗ размеры спроса, поступающие на узлы сети из внешней среды и формирующие неуправляемые потоки, целесообразно рассматривать в качестве внешних возмущающих воздействий.

В настоящее время для синтеза стратегии УЗ с заданной моделью спроса широко применяется метод прогнозирующего управления [2]. Однако, на практике как правило отсутствует информация для построения адекватной модели внешнего спроса, которая необходима для синтеза прогнозирующего управления. Поэтому для решения задач УЗ целесообразно привлечь методы управления в условиях неопределенности.

В работе [3] предложен подход, основанный на концепции «неизвестных, но ограниченных» воздействий. Авторы предполагают, что неизвестный спрос принадлежит заданному множеству, и предлагают моделировать неопределенность спроса в виде интервала, в границах которого спрос произвольным образом принимает свои значения.

В последнее десятилетие в теории УЗ активно применяется концепция инвариантности [4]. В работе [5] приведен обзор результатов, относящихся к подавлению произвольных ограниченных внешних возмущений, полученных на основе использования техники линейных матричных неравенств (ЛМН) и метода инвариантных эллипсоидов. При этом для синтеза оптимального регулятора требуется решить эквивалентную задачу поиска наименьшего по некоторому критерию инвариантного эллипсоида замкнутой динамической системы. В работе [6] на основе техники ЛМН устанавливается достаточное условие устойчивости замкнутой системы – это существование квадратичной функции Ляпунова, построенной на решениях соответствующей системы.

При практической реализации указанного подхода к регуляторам и переходным процессам в замкнутых системах предъявляются разнообразные инженерные требования. Одним из наиболее значимых практических требований является учет ограниченности ресурса управления, поэтому при синтезе естественно накладывать те или иные ограничения на величину управляющего воздействия. В рамках рассматриваемого подхода часто применяется так называемое управление с насыщением [7], которое определено на всем фазовом пространстве, но при этом не является линейным. В настоящей работе рассматривается линейное ограниченное управление, которое определено лишь в некоторой ограниченной области фазового пространства. Подобная постановка задачи позволяет напрямую применять технику ЛМН и получать простые вычислительные алгоритмы. Результаты синтеза линейного управления с ограничением, заданным в квадратичной норме, приведены в работе [8]. Однако, спецификой задач УЗ является неотрицательность значений переменных, что приводит к наличию несимметричных ограничений на значения состояний и управляющих воздействий.

Таким образом, конструктивное описание условий, которым должны удовлетворять значения управляющих воздействий, составляет одну из целей настоящей работы. Оценка допустимой области в пространстве управляющих

воздействий будет получена в терминах разрешимости системы билинейных матричных неравенств (БМН).

Совокупность решений этих БМН предоставляет проектировщику множество допустимых регуляторов, удовлетворяющих всем заданным требованиям и ограничениям. Поэтому естественно задаться целью отыскания среди них оптимального по тому или иному критерию качества. Одним из распространенных критериев является квадратичный, который хорошо изучен в рамках теории линейно-квадратичного управления (LQR) [9]. Однако LQR-задача не предполагает наличия явного ограничения на управление и не может быть точно решена в такой постановке, поскольку в упрощенной формулировке LQR-задача заключается в минимизации по всем линейным стабилизирующим регуляторам некоторого квадратичного функционала с заданными весовыми матрицами.

Поскольку главной целью управления является подавление влияния внешнего спроса на уровни запаса ресурсов, а степень подавления определяется размером инвариантного эллипсоида замкнутой системы, то интерес представляет обратная задача: найти весовые матрицы, при которых гарантируется наименьший размер искомого эллипсоида. Поэтому следующий результат настоящей работы состоит в применении указанного подхода, а именно, будет построен допустимый в смысле заданных ограничений на значения управляющих воздействий стабилизирующий регулятор и предложена система БМН, решение которой позволяет определить значения весовых матриц квадратичного функционала, которые гарантируют максимальную степень подавления влияния внешнего спроса.

Постановка задачи

Рассмотрим в дискретном времени систему УЗ, представленную в виде динамической сети, состоящей из n узлов. Переменными состояний являются наличные уровни запаса ресурсов в узлах сети. В качестве управляющих воздействий рассматриваются объемы заявок на поставку ресурсов, которые формируются узлами в текущем периоде, а возмущениями являются объемы спроса на ресурсы, которые поступают извне.

Предполагается, что структура сети известна, а состояния доступны непосредственному измерению. Для описания транспортных запаздываний используется модель дискретной задержки. Предполагается, что значения интервалов времени, определяющих длительность транспортировки ресурсов между узлами сети $T_{i,j}$, $i, j = \overline{1, n}$, $i \neq j$, и переработки ресурсов в узлах T_i , $i = \overline{1, n}$, известны и кратны выбранному периоду дискретизации. Тогда математическая модель сети описывается разностным уравнением с запаздыванием:

$$x(k+1) = x(k) + \sum_{t=0}^{\Lambda} B_t u(k-t) + Ed(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (1)$$

где $x(k) \in R^n$ – вектор состояний;

$u(k) \in R^m$ – вектор управляющих воздействий;

$d(k) \in R^q$ – вектор внешних возмущений;

Λ – целочисленная переменная, кратная периоду дискретизации и равная максимальному значению запаздывания управляемых потоков между всеми парами связанных узлов сети.

Значения матриц $B_i \in R^{n \times m}$ и $E \in R^{n \times q}$ определяются структурой сети и формируются в соответствии с методикой, изложенной в работе [10]. В процессе функционирования системы должны выполняться следующие ограничения:

$$x(k) \in X = \{x \in R^n : 0 \leq x \leq x^{\max}\}, \quad u(k) \in U = \{u \in R^m : 0 \leq u \leq u^{\max}\}, \quad (2)$$

где x^{\max} , u^{\max} – векторы, определяющие максимальные вместимости хранилищ узлов сети и объемы транспортировок, которые считаются заданными.

Относительно внешнего спроса известно лишь то, что он произвольным образом принимает значения из заданного множества: $d(k) \in D = \{d \in R^q : 0 \leq d^{\min} \leq d \leq d^{\max}\}$, где d^{\min} , d^{\max} – векторы, которые предполагаются известными.

Выполним преобразование модели (1) к стандартному виду без запаздывания на основе расширения вектора состояний $\xi(k) = [x^T(k), u^T(k-1), u^T(k-2), \dots, u^T(k-\Lambda)]^T$ [11]. Тогда уравнения расширенной модели сети примут вид:

$$\begin{aligned} \xi(k+1) &= A\xi(k) + Bu(k) + Gd(k), \\ x(k) &= C\xi(k), \end{aligned} \quad (3)$$

где матрицы $A \in R^{N \times N}$, $B \in R^{N \times m}$, $G \in R^{N \times q}$, $C \in R^{n \times N}$, $N = n + m\Lambda$ имеют соответствующую блочную структуру [10].

Задача заключается в построении управления в форме линейной обратной связи по сигналу невязки между наличными и страховыми уровнями запаса ресурсов

$$u(k) = K(k)(\xi(k) - \xi^*), \quad (4)$$

где $K(k) \in R^{m \times N}$ – нестационарная матрица коэффициентов обратной связи;

$\xi^* = \underbrace{[x^{*\top}, \dots, x^{*\top}]^T}_{\Lambda+1}$ – составной вектор, в котором элементы вектора x^* определяют

размеры страховых запасов ресурсов в узлах сети и вычисляются на основании верхних граничных значений спроса с учетом величины запаздывания управляемых потоков и продуктивной модели Леонтьева [12]:

$$x^* = (I - \Pi)^{-1} d^*, \quad d_i^* = \begin{cases} \Lambda_i d_i^{\max}, & i = \overline{1, q}, \\ 0, & i = \overline{q+1, n}, \end{cases} \quad \Lambda_i = \max \{T_{j,i} + T_i, j = \overline{1, n}, j \neq i\}, \quad (5)$$

где I – единичная матрица соответствующей размерности;

$\Pi \in R^{n \times n}$ – продуктивная матрица, значение элемента Π_{ij} которой равно количеству единиц ресурса i , необходимого для производства единицы ресурса j ;

Λ_i – величина запаздывания управляемых потоков узла i .

Управление (4) должно стабилизировать замкнутую систему, а также для любого начального состояния $x(0) \in X$ и внешнего спроса $d(k) \in D \quad \forall k \geq 0$ обеспечивать полное и своевременное удовлетворение как внешнего, так и внутреннего спроса на ресурсы при ограничениях (2). При этом построенный регулятор должен быть оптимальным в смысле минимума квадратичного функционала

$$J_\infty(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \left((\xi(k) - \xi^*)^T W_\xi (\xi(k) - \xi^*) + u^T(k) W_u u(k) \right), \quad (6)$$

где $W_\xi \in R^{N \times N}$, $W_u \in R^{m \times m}$ – положительно определенные диагональные весовые матрицы.

Синтез ограниченного стабилизирующего управления запасами

Выполним аппроксимацию множества D значений внешнего спроса эллипсоидом наименьшего объема, уравнение которого имеет вид

$$E(d_c, P_d) = \{d(k) \in R^q : (d(k) - d_c)^T P_d^{-1} (d(k) - d_c) \leq 1\}. \quad (7)$$

Параметры эллипсоида $P_d \in R^{q \times q}$, $d_c \in R^q$ определяются путем решения задачи полуопределенного программирования (ПОП) аналогично [13].

Представим расширенную модель замкнутой системы для управления (4) в виде:

$$\begin{aligned} \xi(k+1) &= A_f (\xi(k) - \xi^*) + S \xi^* + G(d(k) - d_c) + G d_c, \\ x(k) &= C \xi(k), \quad A_f = A + BK. \end{aligned} \quad (8)$$

Необходимое и достаточное условие стабилизируемости системы (3) с помощью линейной обратной связи (4), выраженное в терминах линейных матричных неравенств, представим в виде следующей теоремы.

Теорема. Пусть матрицы $\hat{Q}(k) \succ 0$, $\hat{Y}(k)$ и скаляр $\hat{\alpha}(k)$ получены в результате решения задачи полуопределенного программирования

$$\text{trace}(Q(k)) \rightarrow \min, \quad (9)$$

при ограничениях на $Q(k) = Q^T(k) \in R^{N \times N}$, $Y(k) \in R^{m \times N}$ и $\alpha(k)$

$$\begin{aligned} &\alpha(k) > 0, \quad Q(k) \succ 0, \\ &\left[\begin{array}{ccccccc} Q(k) & 0_N & 0_{N \times q} & (AQ(k) + BY(k))^T & 0_{N \times q} & Q(k)W_\xi & Y^T(k)W_u \\ 0_N & 0_N & 0_{N \times q} & (A - I)^T & 0_{N \times q} & 0_N & 0_{N \times m} \\ 0_{q \times N} & 0_{q \times N} & 0_q & G^T & 0_q & 0_{q \times N} & 0_{q \times m} \\ AQ(k) + BY(k) & A - I & G & Q & GP_d^{\frac{1}{2}} & 0_N & 0_{N \times m} \\ 0_{q \times N} & 0_{q \times N} & 0_q & P_d^{\frac{1}{2}} G^T & \alpha(k)I_q & 0_{q \times N} & 0_{q \times m} \\ W_\xi Q(k) & 0_N & 0_{N \times q} & 0_N & 0_{N \times q} & W_\xi & 0_{N \times m} \\ W_u Y(k) & 0_{m \times N} & 0_{m \times q} & 0_{m \times N} & 0_{m \times q} & 0_{m \times N} & W_u \end{array} \right] \succeq 0, \end{aligned} \quad (10)$$

где $0_{N \times q}$ – нуль-матрица соответствующей размерности.

Если задача (9) при ограничениях (10) имеет решение, то регулятор с матрицей

$$K(k) = \hat{Y}(k) \hat{Q}^{-1}(k) \quad (11)$$

стабилизирует систему (3) в момент времени k , а квадратичная форма

$$V = (\xi(k) - \xi^*)^T \hat{Q}^{-1}(k) (\xi(k) - \xi^*) \quad (12)$$

является функцией Ляпунова для замкнутой системы (8).

Доказательство Теоремы приведено в Приложении.

В качестве оценки множества достижимости замкнутой системы (8) при действии возмущений $d(k) \in E(d_c, P_d)$ будем рассматривать эллипсоид

$$E(\xi^*, Q(k)) = \left\{ \xi(k) \in R^N : (\xi(k) - \xi^*)^T Q^{-1}(k) (\xi(k) - \xi^*) \leq 1 \right\}. \quad (13)$$

В следующей лемме дается достаточное условие выполнения ограничений (2) на значения выходов и управляющих воздействий модели (3). Оно формулируется в виде системы ЛМН относительно переменных $Q(k)$ и $Y(k)$, фигурирующих в Теореме.

Лемма 1. Пусть матрицы $Q(k) \succ 0$, $Y(k)$ и скаляр $\alpha(k)$ удовлетворяют ЛМН (10). Тогда $\forall k \geq 0$ выполнение ЛМН

$$\begin{bmatrix} Q_x & CQ(k) \\ Q(k)C^T & Q(k) \end{bmatrix} \succeq 0, \quad (14)$$

$$Y(k)(\xi(k) - \xi^*) \succeq 0, \quad \begin{bmatrix} u^{\max} (\xi(k) - \xi^*)^+ Y^T(k) & Y(k) \\ Y^T(k) & Q(k) \end{bmatrix} \succeq 0, \quad (15)$$

где « $^+$ » – псевдообращение Мура-Пенроуза, гарантирует выполнение ограничений (2) внутри эллипсоида (13) для системы (3), замкнутой регулятором (4) с матрицей (11).

Таким образом, для построения стабилизирующего регулятора при наличии ограничений (2) Теорема модифицируется следующим образом: к ЛМН (10), гарантирующему стабилизацию замкнутой системы, добавляются ЛМН (14) и (15). При этом эллипсоид (13) с полученной матрицей $\hat{Q}(k)$ будет инвариантным, то есть фазовая траектория замкнутой системы будет оставаться внутри эллипсоида для всех моментов времени. Это следует из того, что квадратичная форма $(\xi(k) - \xi^*)^T \hat{Q}^{-1}(k) (\xi(k) - \xi^*)$ является функцией Ляпунова для рассматриваемой системы.

Анализ условий разрешимости задачи синтеза управления

Возникает естественный вопрос об условиях разрешимости задачи синтеза стабилизирующего управления (9) при ограничениях (10), (14), (15). Необходимыми условиями существования решения задачи являются:

1. Условие управляемости пары матриц (A, B) ;

2. Условие достаточности ресурсов управления [11], которое допускает следующую геометрическую интерпретацию: выпуклый многогранник, описывающий влияние внешних возмущений, должен находиться строго внутри выпуклого многогранника, описывающего ограничения на ресурсы управления.

Задача проверки последнего условия является NP-трудной и представляет собой совокупность из 2^{q+m} задач линейного программирования. Для ее решения в [11] предложен алгоритм. В связи с этим представляет интерес вычисление минимальных допустимых величин управляющих воздействий. Вопрос о минимальных допустимых значениях компонент вектора u^{\max} решается следующим образом.

Лемма 2. Пусть вектор u^{\max} получен в результате решения оптимизационной задачи

$$e_m u^{\max} \rightarrow \min \quad (16)$$

при ограничениях (10), (14), (15), где $e_m = [1, 1, \dots, 1] \in R^{1 \times m}$ – вектор-строка из единиц, а минимизация проводится по матричным переменным $Q(k) = Q^T(k) \in R^{N \times N}$, $Y(k) \in R^{m \times N}$ и скаляру $\alpha(k)$. Тогда при $u^{\max} \geq \bar{u}^{\max}$, где сравнение выполняется поэлементно, для системы (3) существует стабилизирующий регулятор вида (4) при ограничениях (2).

Поиск решения задачи (16) не является простым, поскольку она содержит билинейное матричное неравенство, так как второе из матричных неравенств (15) содержит произведение матричной переменной $Y^T(k)$ и векторной переменной u^{\max} . Для поиска решения системы билинейных матричных неравенств (БМН) предлагается использовать итерационную процедуру, которая не гарантирует сходимости процесса, однако такой подход применяется во многих практических приложениях [14].

Итерационная процедура для поиска решения БМН состоит в следующем:

1. Инициализация:

- задать начальные значения компонент вектора $u_{(0)}^{\max}$;
- установить максимальное количество итераций $iter$ и величину ошибки ε ;
- установить номер итерации $j \leftarrow 0$.

2. Установить $j \leftarrow j + 1$. Найти значения матриц $Q_{(j)}(k)$, $Y_{(j)}(k)$ и скаляра $\alpha_{(j)}(k)$ путем решения задачи (9) при ограничениях (10),(14),(15), используя значения $u_{(0)}^{\max}$.

Найти значения компонент вектора $u_{(j)}^{\max}$ путем решения задачи (16) при ограничениях (10),(14),(15), используя значения матриц $Q_{(j)}(k)$, $Y_{(j)}(k)$ и скаляра $\alpha_{(j)}(k)$, полученные на шаге 2.

3. Проверить выполнение условий критерия останова ($j \geq iter$) или $(\|u_{(j)}^{\max} - u_{(j-1)}^{\max}\| / \|u_{(j)}^{\max}\| < \varepsilon)$ и, если они не выполнены, повторить шаг 2, используя найденные значения $u_{(j)}^{\max}$. В противном случае остановить процедуру.

Далее рассмотрим критерий качества (6). Очевидно, что размер эллипсоида (13) зависит от значений весовых матриц W_ξ и W_u , причем чем больше сумма значений следа матриц, тем больше скорость убывания функции Ляпунова (12) и тем меньше размер эллипсоида (13). Поскольку главной целью построения регулятора (4) является подавление влияния внешних возмущений $d(k) \in E(d_c, P_d)$ на выходы системы (3), то вопрос об оптимальных значениях весовых матриц решается следующим образом.

Лемма 3. Пусть матрицы $\hat{W}_\xi \succ 0$ и $\hat{W}_u \succ 0$ получены в результате решения оптимизационной задачи

$$\text{trace}(W_\xi) + \text{trace}(W_u) \rightarrow \max \quad (17)$$

при ограничениях (10), (14), (15) на матричные переменные $Q(k) = Q^T(k) \in R^{N \times N}$, $Y(k) \in R^{m \times N}$, $W_\xi \in R^{N \times N}$, $W_u \in R^{m \times m}$ и скаляр $\alpha(k)$, а значения вектора u^{\max} удовлетворяют Лемме 2.

Тогда регулятор (4) с матрицей (11):

1. Стабилизирует систему (3), причем вдоль всей траектории системы выполнены ограничения (2).

2. Оптимально в смысле критерия (6) с полученными весовыми матрицами \hat{W}_ξ , \hat{W}_u подавляет влияние ограниченных внешних возмущений $d(k) \in E(d_c, P_d)$ на выходы системы (3).

Необходимо отметить, что матричное неравенство (10) в задаче (17) является БМН. Поэтому для поиска решения применяется итерационная процедура, аналогичная приведенной выше.

1. Инициализация:

- задать начальные значения матриц $W_{\xi(0)}$ и $W_{u(0)}$;
- установить максимальное количество итераций $iter$ и величину ошибки ε ;
- установить номер итерации $j \leftarrow 0$.

2. Установить $j \leftarrow j+1$. Найти значения матриц $Q_{(j)}(k)$, $Y_{(j)}(k)$ и скаляра $\alpha_{(j)}(k)$ путем решения задачи (17) при ограничениях (10),(14),(15), используя значения $W_{\xi(0)}$ и $W_{u(0)}$.

Найти значения матриц $W_{\xi(j)}$ и $W_{u(j)}$ путем решения задачи (17) при ограничениях (10), (14),(15), используя значения матриц $Q_{(j)}(k)$, $Y_{(j)}(k)$ и скаляра $\alpha_{(j)}(k)$, полученные на шаге 2.

3. Проверить выполнение условий критерия останова ($j \geq iter$) или ($\|W_{\xi(j)} - W_{\xi(j-1)}\| / \|W_{\xi(j)}\| < \varepsilon$) и, если они не выполнены, повторить шаг 2, используя найденные значения $W_{\xi(j)}$ и $W_{u(j)}$. В противном случае остановить процедуру.

Численный пример

В качестве примера рассмотрим модель сети, которая изучалась в работе [15] и описывается графом $G = (\{1,2,3\}, \{(2,1),(2,3),(3,1)\})$. Представим управляемые потоки u_1 и u_3 в виде гипердуг, а также добавим поток u_2 , который описывает поставки сырья извне (см. рис. 1). Дуги d_1, d_2 , изображенные пунктирными линиями, представляют внешний спрос. Значение времени транспортировки $T_{i,j}$ и количество единиц продукции Π_{ij} , которое требуется в соответствии с технологическим процессом, указаны для каждого управляемого потока в круглых и квадратных скобках, соответственно. Возле каждого узла в круглых скобках указаны значения времени выполнения заказа T_i .

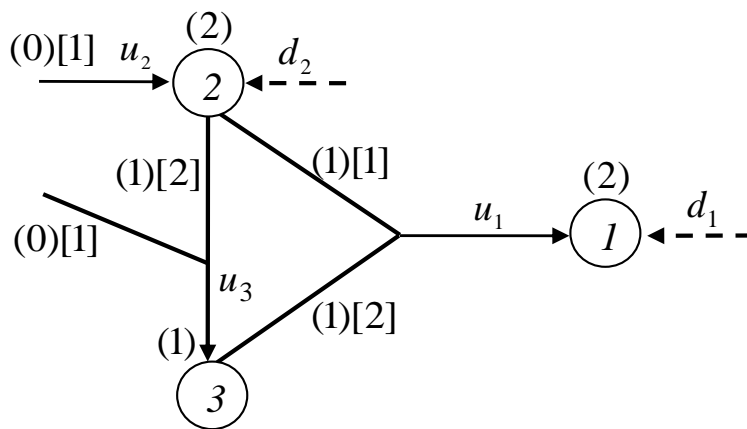


Рис. 1. Графическое представление модели сети

Специфика рассматриваемой сети в том, что на узел 1 действует только внешний спрос; на узел 2 действует как внешний, так и внутренний спрос со стороны узлов 1 и 3; на узел 3 – только внутренний спрос со стороны узла 1.

Заданы структурные ограничения на объемы запаса ресурсов $x^{\max} = [400, 5000, 1300]^T$, на размеры заказов $u^{\max} = [120, 2000, 500]^T$, граничные значения внешнего спроса $d^{\min} = [50, 20]^T$, $d^{\max} = [90, 60]^T$ и начальные условия $x(0) = [300, 4000, 1000]^T$.

Все вычисления выполнены в среде MATLAB с использованием свободно распространяемого пакета CVX [16]. После вычисления величины запаздывания материальных потоков всех узлов сети находим максимальное значение $\Lambda = 3$. По формуле (5) вычисляем уровни страховых запасов узлов сети $x^* = [270, 3900, 1080]^T$. В результате решения соответствующей задачи ПОП [13] определяем параметры эллипсоида (7), аппроксимирующего множество D значений внешнего спроса: $d_c = [70, 40]^T$, $P_d = \text{diag}(800, 800)$. По формуле (П.7) вычисляем матрицу эллипсоида, аппроксимирующего множество X допустимых значений состояний: $Q_x = \text{diag}(4225, 302500, 12100)$.

Зададим значение критерия останова $\varepsilon = 10^{-2}$ и в результате решения задачи (16) при ограничениях (10), (14), (15) вычислим минимальные допустимые величины управляющих воздействий с помощью итерационной процедуры, описанной выше: $u^{\max} = [103, 1874, 468]^T$. Выберем начальные значения диагональных элементов весовых матриц $W_{\xi(0)}$ и $W_{u(0)}$ равными 1.0×10^{-12} , зададим $\varepsilon = 10^{-1}$ и в результате решения задачи (17) при ограничениях (10),(14),(15) с помощью итерационного подхода вычислим оптимальные значения весовых матриц, определяющих критерий качества (6): $W_{\xi} = 10^{-4} \times \text{diag}(1.309 \times 10^{-6}, 7.288 \times 10^{-6}, 9.192 \times 10^{-6}, 0.214, 0.268, 0.287, 0.109, 0.289)$, $W_u = 10^{-4} \times \text{diag}(57, 0.103, 1.650)$.

Моделирование осуществлялось в течение 15 периодов. Результаты моделирования для узла 1 при скачкообразно изменяющемся внешнем спросе представлены на рис. 2.

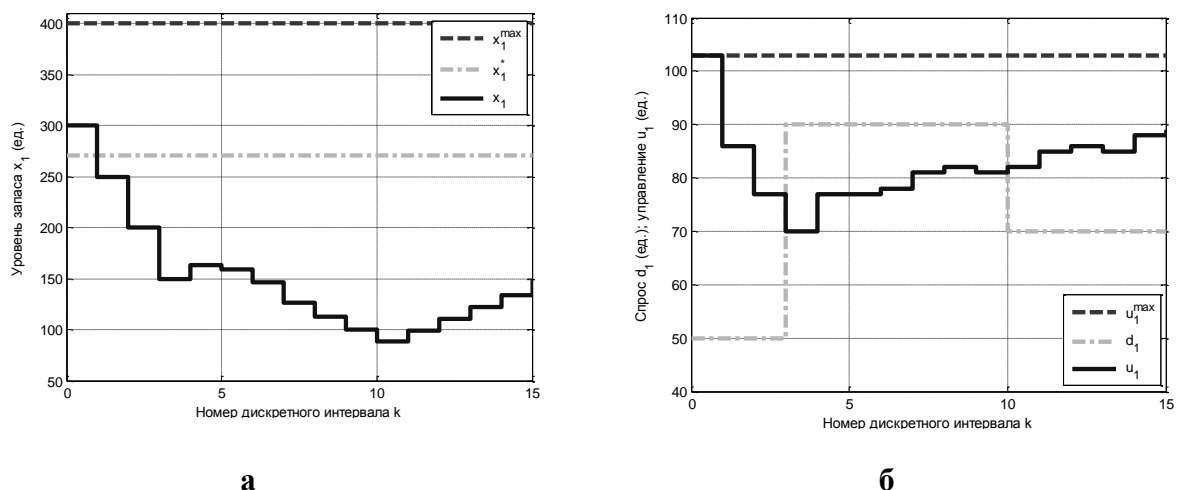


Рис. 2. Графики переходных процессов для узла 1: *а* – значения наличного и страхового уровней запасов; *б* – значения внешнего спроса и управляющих воздействий.

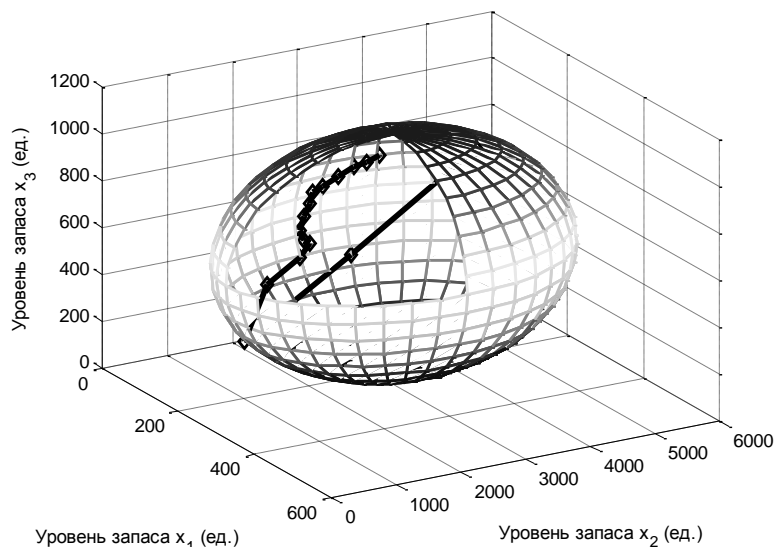


Рис. 3. Фазовая траектория системы и инвариантный эллипсоид, полученный на последнем шаге

Выводы

Предложен подход к решению задачи синтеза стабилизирующего управления запасами в динамических сетях со структурными ограничениями на состояния и управления в условиях действия неизвестных, но ограниченных внешних воздействий. Закон управления строится в виде линейной нестационарной обратной связи по сигналу невязки между наличными и страховыми уровнями запаса ресурсов. Для синтеза регулятора требуется решить эквивалентную задачу поиска наименьшего по некоторому критерию инвариантного эллипсоида замкнутой системы, которая сведена к задаче разрешимости системы линейных матричных неравенств. Оценка допустимой области в пространстве управляющих воздействий получена в терминах разрешимости системы билинейных матричных неравенств, для решения которой предложена итеративная процедура. Также получена система билинейных матричных неравенств, решение которой позволяет вычислить весовые матрицы квадратичного функционала, при которых гарантируется максимальная степень подавления влияния внешнего спроса на уровни запаса ресурсов.

Приложение

Доказательство Теоремы.

Определим квадратичную функцию Ляпунова, построенную на решениях системы (8):

$$V(\xi(k) - \xi^*) = (\xi(k) - \xi^*)^T P(k) (\xi(k) - \xi^*), \quad (\text{П.1})$$

где $P(k) \in R^{N \times N}$ – симметричная положительно определенная матрица.

Вычислим первую разность по k функции Ляпунова (П.1) в силу системы (8) и потребуем, чтобы $\forall k \geq 0$ значение функции с течением времени убывало с некоторой гарантированной скоростью:

$$V(\xi(k+1) - \xi^*) - V(\xi(k) - \xi^*) \leq -J_\infty(k). \quad (\text{П.2})$$

Если (П.2) выполняется, то следуя [17] можно показать, что функция Ляпунова (П.1) $\forall k \geq 0$ определяет верхнее граничное значение критерия (6):

$$\max_{d(k) \in E(d_c, P_d)} J_\infty(k) \leq V(\xi(k) - \xi^*). \quad (\text{П.3})$$

Тогда, в соответствии с (П.3), задача синтеза управления, минимизирующего (6), эквивалентна задаче минимизации функции Ляпунова: $u(k) = \arg \min_{u(k) \in U} V(\xi(k) - \xi^*)$, которая сводится к задаче минимизации эллипсоида (13) по критерию следа его матрицы $Q(k)$.

Введем следующие обозначения:

$$s(k) = \left[(\xi(k) - \xi^*)^T, \xi^{*T}, d_c^T, (d(k) - d_c)^T \right]^T \in \mathbb{R}^{2(N+q)},$$

$$f_i(s) = s^T M_i s, \quad i = 0, 1, \quad M_0 = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{12}^T & M_{22} \end{bmatrix}, \quad M_1 = \text{block diag}(0_N, 0_N, 0_q, P_d^{-1}),$$

$$\text{где } M_{11} = \begin{bmatrix} A_f^T P(k) A_f - P(k) + W_\xi + K^T(k) W_u K(k) & A_f^T P(k) (A - I) & A_f^T P(k) G \\ (A - I)^T P(k) A_f & (A - I)^T P(k) (A - I) & (A - I)^T P(k) G \\ G^T P(k) A_f & G^T P(k) (A - I) & G^T P(k) G \end{bmatrix};$$

$$M_{12}^T = [G^T P(k) A_f \quad G^T P(k) (A - I) \quad G^T P(k) G]; \quad M_{22} = G^T P(k) G.$$

Тогда неравенства (П.2) и (7) можно представить в виде: $f_0(s) \leq 0 \quad \forall s : f_1(s) \leq 1$.

Согласно S -процедуре с одним ограничением [18] последнее выражение эквивалентно ЛМН $M_0 \leq \alpha(k) M_1$ для некоторого $\alpha(k) > 0$, или

$$M_0 - \alpha(k) M_1 = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{12}^T & M_{22} - \alpha(k) P_d^{-1} \end{bmatrix} \preceq 0. \quad (\text{П.4})$$

Используя лемму Шура [18], неравенство (П.4) можно записать в виде:

$$M_{11} - M_{12} (M_{22} - \alpha(k) P_d^{-1})^{-1} M_{12}^T \preceq 0.$$

Применяя тождество Шермана-Моррисона-Вудбери [19], получим:

$$\begin{bmatrix} A_f^T \Psi^{-1}(k) A_f - P(k) + W_\xi + K^T(k) W_u K(k) & A_f^T \Psi^{-1}(k) (A - I) & A_f^T \Psi^{-1}(k) G \\ (A - I)^T \Psi^{-1}(k) A_f & (A - I)^T \Psi^{-1}(k) (A - I) & (A - I)^T \Psi^{-1}(k) G \\ G^T \Psi^{-1}(k) A_f & G^T \Psi^{-1}(k) (A - I) & G^T \Psi^{-1}(k) G \end{bmatrix} \preceq 0, \quad (\text{П.5})$$

$$\text{где } \Psi(k) = P^{-1}(k) - \frac{1}{\alpha(k)} G P_d G^T.$$

Введем обозначение $Q(k) = P^{-1}(k)$ и домножим неравенство (П.5) слева и справа на блочно-диагональную матрицу $\text{block diag}(Q(k), I_N, I_q)$.

Введем, согласно [17], вспомогательную матричную переменную $Y(k) = K(k)Q(k)$, исключая переменную $K(k)$. В силу $Q(k) \succ 0$ матрица $K(k)$ восстанавливается единственным образом: $K(k) = Y(k)Q^{-1}(k)$.

Используя лемму Шура, представим полученное неравенство в эквивалентном виде:

$$\begin{bmatrix} -Q(k) + Q(k)W_\zeta Q(k) + Y^T(k)W_u Y(k) & 0_N & 0_{N \times q} \\ 0_N & 0_N & 0_{N \times q} \\ 0_{q \times N} & 0_{q \times N} & 0_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} AQ(k) + BY(k) \\ A - I \\ G \end{bmatrix}^T \Psi^{-1}(k) \begin{bmatrix} AQ(k) + BY(k) & A - I & G \end{bmatrix} \preceq 0.$$

Вновь применив лемму Шура и домножив полученное неравенство слева и справа на $block\ diag(I_N, I_N, I_q, I_N, I_q, W_\zeta, W_u)$, окончательно ЛМН представим в виде (10).

Таким образом, приходим к задаче минимизации линейной функции $trace(Q(k))$ при ограничениях в виде ЛМН (10), которая является задачей полуопределенного программирования. Теорема доказана.

Доказательство Леммы 1.

Рассмотрим ограничения (2) на значения выходов и управляющих воздействий модели (3). Для того, чтобы учесть первое из ограничений (2), выполним аппроксимацию множества допустимых значений X эллипсоидом

$$E(x^*, Q_x) = \{x \in R^n: (x(k) - x^*)^T Q_x^{-1} (x(k) - x^*) \leq 1\}, \quad (П.6)$$

у которого вектор, определяющий координаты центра, равен вектору страховых запасов x^* , а матрица эллипсоида Q_x вычисляется на основании вектора x^{\max} , задающего граничные значения:

$$Q_x = diag\left(\frac{1}{4}(\min\{x_1^*, x_1^{\max} - x_1^*\})^2, \dots, \frac{1}{4}(\min\{x_n^*, x_n^{\max} - x_n^*\})^2\right). \quad (П.7)$$

В качестве оценки множества достижимости замкнутой системы (8) выступает эллипсоид (13). Введем в рассмотрение эллипсоид, аппроксимирующий множество выходов системы (8)

$$E(x^*, CQ(k)C^T) = \{x \in R^n: (x(k) - x^*)^T (CQ(k)C^T)^{-1} (x(k) - x^*) \leq 1\}. \quad (П.8)$$

Тогда для того, чтобы выполнялось первое из неравенств (2) необходимо, чтобы объем эллипсоида (П.8) не превосходил объема эллипсоида (П.6), что эквивалентно выполнению неравенства

$$CQ(k)C^T \leq Q_x. \quad (П.9)$$

С помощью леммы Шура неравенство (П.9) может быть представлено в виде ЛМН (14).

Рассмотрим второе из ограничений (2) на управляющие воздействия, которое представим в виде двух неравенств

$$0 \leq u(k), \quad u(k) \leq u^{\max}. \quad (\text{П.10})$$

С учетом (4) и тождества (11) неравенства (П.10) представим в виде

$$0 \leq Y(k)Q^{-1}(k)(\xi(k) - \xi^*), \quad Y(k)Q^{-1}(k)(\xi(k) - \xi^*) \leq u^{\max}. \quad (\text{П.11})$$

Поскольку матрица $Q(k)$ является положительно определенной, для того, чтобы выполнялось первое из неравенств (П.11) достаточно, чтобы выполнялось неравенство: $0 \leq Y(k)(\xi(k) - \xi^*)$.

Умножим слева левую и правую часть второго из неравенств (П.11) сначала на $(\xi(k) - \xi^*)^+$, а затем на $Y^T(k)$, и с помощью леммы Шура представим в виде второго ЛМН (15).

Таким образом, ограничения (2) представлены в виде ЛМН (14), (15). Лемма 1 доказана.

Список литературы

1. Лотоцкий, В.А. Модели и методы управления запасами / В.А. Лотоцкий, А.С. Мандель. — М.: Наука, 1991. — 189 с.
2. Constrained model predictive control: stability and optimality / [Mayne D. Q. et al.] // Automatica. — 2000. — V. 36(6). — P. 789-814.
3. Bertsekas, D.P. Recursive state estimation for a set-membership description of uncertainty / D. Bertsekas, I. Rhodes // IEEE Trans. Automat. Control. — 1971. — Vol. 16. — P. 117-128.
4. Blanchini, F. Set-theoretic methods in control / F. Blanchini, S. Miani. — Boston: Birkhauser, 2008. — 481 p.
5. Хлебников, М.В. Оптимизация линейных систем при ограниченных внешних возмущениях (техника инвариантных эллипсоидов) / М.В. Хлебников, Б.Т. Поляк, В.М. Кунцевич // Автоматика и телемеханика. — 2011. — № 11. — С. 9-59.
6. Linear matrix inequalities in system and control theory / [Boyd S. et al.]. — Philadelphia: SIAM, 1994. — 193 p.
7. Polyak, B. Ellipsoidal approximations to attraction domains of linear systems with bounded control / B. Polyak, P. Shcherbakov // Proc. American Control Conf., St. Louis, USA. — June 10-12, 2009. — P. 5363-5367.
8. Хлебников, М.В. Ограниченное линейное управление, оптимальное по квадратичному критерию специального вида / М.В. Хлебников, П.С. Щербаков // Труды ИСА РАН. — 2013. — Т. 63. — Вып. 2. — С. 85-89.
9. Квакернаак, Х. Линейные оптимальные системы управления: Пер. с англ. / Х. Квакернаак, Р. Сиван. — М.: Мир, 1977. — 656 с.
10. Дорофеев, Ю.И. Построение математических моделей управляемых сетей поставок с учетом запаздываний потоков / Ю.И. Дорофеев, А.А. Никульченко // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2013. — № 1. — С. 16-27.
11. Feedback control of production-distribution systems with unknown demand and delays / [F. Blanchini et al.] // IEEE Trans. on robotics and automation. — 2000. — Vol. 16. — No. 3. — P. 313-317.
12. Солодовников, А.С. Математика в экономике. В 3-х ч. Ч. 1.: учебник / А. С. Солодовников, В. А. Бабайцев, А. В. Браилов. — М.: Финансы и статистика, 1999. — 224 с.
13. Дорофеев, Ю.И. Синтез системы оптимального управления запасами с дискретным ПИД-регулятором с использованием техники линейных матричных неравенств / Ю. И. Дорофеев // Збірник наукових праць Харківського університету Повітряних Сил. — 2014. — Вип. 4(41). — С. 34-41.
14. Mulder, E.F. Multivariable anti-windup controller synthesis using bilinear matrix inequalities / E. Mulder, M. Kothare, M. Morari // European Journal of Control. — 2000. — Vol. 7. — No. 5. — P. 455-464.
15. Blanchini, F. Least inventory control of multistorage systems with non-stochastic unknown inputs / F. Blanchini, F. Rinaldi, W. Ukovich // IEEE Trans. on robotics and automation. — 1997. — Vol. 13. — P. 633-645.

16. Grant, M. CVX: MATLAB software for disciplined convex programming, version 1.21 / M. Grant, S. Boyd. — Режим доступа: <http://cvxr.com/cvx>.
17. Kothare, M.V. Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities / M.V. Kothare, V. Balakrishnan, M. Morari // Automatica. — 1996. — Vol. 32. — No. 10. — P. 1361-1379.
18. Баландин, Д.В. Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств / Д.В. Баландин, М.М. Коган. — М. : Физматлит, 2007. — 280 с.
19. Голуб, Д. Матричные вычисления: Пер. с англ. / Д. Голуб, Ч. Ван Лоан. — М. : Мир, 1999. — 548 с.

АНАЛІЗ УМОВ РОЗВ'ЯЗУВАНОСТІ ЗАДАЧІ СИНТЕЗУ ОБМЕЖЕНОГО СТАБІЛІЗУЮЧОГО КЕРУВАННЯ ЗАПАСАМИ ЗА ДОПОМОГОЮ БІЛІНІЙНИХ МАТРИЧНИХ НЕРІВНОСТЕЙ

Ю.І. Дорофеев

Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»,
вул. Фрунзе, 21, м Харків, 61002, Україна; e-mail: dorofeev@kpi.kharkiv.edu

Розглядається задача синтезу стабілізуючого керування запасами в умовах дії невідомого, але обмеженого зовнішнього попиту і структурних обмежень на стани та керуючі дії. Керування будується у формі лінійного нестационарного зворотного зв'язку за сигналом нев'язки між готівковими і страховими рівнями запасу ресурсів. Для синтезу регулятора потрібно вирішити еквівалентну задачу пошуку найменшого за деяким критерієм інваріантного еліпсоїда замкненої системи, яка зведена до задачі розв'язання системи лінійних матричних нерівностей. Наступною задачею є оцінювання допустимої області в просторі керуючих впливів, вирішення якої отримано в термінах розв'язуваності системи білінійних матричних нерівностей. Також отримана система білінійних матричних нерівностей, вирішення якої дозволяє обчислити вагові матриці квадратичного функціоналу, при яких гарантується максимальна ступінь подавлення впливу зовнішнього попиту на рівні запасу ресурсів. Розглянуто чисельний приклад.

Ключові слова: керування запасами, лінійне обмежене керування, інваріантний еліпсоїд, лінійна матрична нерівність, білінійна матрична нерівність.

ANALYSIS OF THE SOLVABILITY CONDITIONS OF THE CONSTRAINED STABILIZING INVENTORY CONTROL SYNTHESIS PROBLEM USING BILINEAR MATRIX INEQUALITIES

Yu.I. Dorofieiev

National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute",
str. Frunze, 21, Kharkiv, 61002, Ukraine; e-mail: dorofeev@kpi.kharkiv.edu

The problem of stabilizing inventory control synthesis under the action of an unknown but bounded external demand and structural constraints on the state and control actions is considered. A control is constructed as a linear non-stationary feedback with respect to deviation between cash and safety stock levels of resources. For the regulator synthesis is required to solve the equivalent problem of finding the least invariant ellipsoid of the closed system according to some criterion, which is reduced to the problem of solvability of a linear matrix inequalities system. The next problem is to estimation of the feasible region in the space of control actions, which is solved in terms of solvability of a system of bilinear matrix inequalities. Also, a system of bilinear matrix inequalities is obtained, which decision allows to calculate the quadratic functional weight matrices, which guarantees the maximum degree of the external demand influence suppression on resources inventory levels. The numerical example is considered.

Keywords: inventory control; constrained linear control; invariant ellipsoid; linear matrix inequality, bilinear matrix inequality.

ЭФФЕКТИВНЫЙ СПОСОБ МИНИМИЗАЦИИ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ НА ОСНОВЕ ИНФИМУМНЫХ ДИЗЬЮНКТИВНЫХ НОРМАЛЬНЫХ ФОРМ

Ю.Д. Иванов

Одесский национальный политехнический университет,
пр. Шевченко, 1, Одесса, 65044, Украина; e-mail: iva.iurij2013@yandex.ua

Приводится сравнительный анализ известных методов минимизации булевых функций. Предлагается оптимальный способ минимизации булевых функций, основанный на инфимумных дизъюнктивных нормальных формах булевых функций.

Ключевые слова: совершенная дизъюнктивная нормальная форма, минимальная дизъюнктивная нормальная форма, инфимумная дизъюнктивная нормальная форма

Введение

Сложность комбинационных и последовательных автоматов, реализованных на основе дизъюнктивных нормальных форм (ДНФ) булевых функций (БФ) определяется суммарным рангом конъюнкций минимальных дизъюнктивных нормальных форм (МДНФ) соответствующих БФ.

Большинство известных методов минимизации булевых функций, определяющих МДНФ, относятся к локальным алгоритмам упрощения ДНФ [1]. К локальному алгоритму относятся и классический метод Квайна-Мак-Класки, основанный на использовании логических операций склеивания и поглощения.

Шаги, составляющие метод Квайна-Мак-Класки.

1. Задание БФ в виде совершенной дизъюнктивной нормальной формы (СДНФ).
2. Проведение операции склеивания, в результате которой получаем дизъюнкцию всех возможных конъюнкций заданной БФ.
3. Получение сокращенной ДНФ заданной БФ путем проведения операции поглощения.
4. Образование ядра путем объединения всех конъюнкций, оставшихся после поглощения некоторых конъюнкций.
5. Упрощение таблицы конъюнкций путем вычеркивания строк и столбцов, соответствующих ядру.
6. Определение всех тупиковых ДНФ БФ.
7. Определение минимальных ДНФ (МДНФ) заданной БФ.

Понятие ядра является локальным [1], поэтому алгоритм Квайна-Мак-Класки также принадлежит к локальным алгоритмам со всеми недостатками, присущими этим алгоритмам.

Кроме того, для большого числа переменных n перечисление вариантов склеивания и синтез множества тупиковых ДНФ значительно усложняет процедуру минимизации.

К локальным алгоритмам относится и метод двух подмножеств, который базируется на представлении множества вершин n -мерного куба двумя

подмножествами так, что одно подмножество содержит вершины с четным числом переменных с инверсией, а второе подмножество состоит из вершин с нечетным числом переменных с инверсией.

Этот метод распространяется на БФ от n переменных и в общем случае проще классического метода Квайна-Мак-Класки.

Различные модификации метода древовидного графа [2] просты в реализации, но обладают существенными недостатками, которые заключаются в получении простых конъюнкций и в выборе среди них тупиковых форм.

Существенным свойством локальных алгоритмов минимизации БФ является то, что каждое однократно проводимое упрощение локально, т.е. запрашивает только один член (одну конъюнкцию) ДФН, причем все возможные преобразования сводятся только к вычеркиванию букв в конъюнкциях или вычеркиванию самих конъюнкций.

Последовательность упрощений дает возможность построить тупиковую ДНФ, которая является локальным экстремумом. Различие последовательности преобразований исходной ДНФ определяется множеством локальных экстремумов, среди которых необходимо найти глобальный экстремум, то есть минимальную ДНФ.

В общем случае последовательность преобразований сводится к естественной упорядоченности: совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ) – сокращенная ДНФ – тупиковая ДНФ – минимальная ДНФ.

Сокращенная ДНФ однозначно строится по СДНФ, но определение тупиковых ДНФ неоднозначно, так как удаление некоторых конъюнкций в сокращенной ДНФ может приводить как к МДНФ, так и к тупиковой ДНФ, которая в общем случае может и не быть МДНФ.

Кроме того, точное число тупиковых ДНФ конкретной БФ не определено. Это приводит к тому, что в локальных алгоритмах выбор МДНФ среди тупиковых ДНФ не является строго однозначным.

Таким образом, определение глобального экстремума, то есть МДНФ с минимально возможным рангом $МДНФ_{\min \min}$, в локальных алгоритмах строго не доказано. Это приводит к тому, что локальные алгоритмы в общем случае осуществляют приблизительную оценку МДНФ, которая не является глобальным экстремумом, то есть $МДНФ_{\min \min}$.

Наложение любых ограничений на процедуру упрощения БФ, например, минимизация БФ по частям, представление БФ в виде нескольких подмножеств, задание конкретной БФ, определяет локальный характер этих упрощений со всеми присущими недостатками.

Основная часть

Для проведения сравнительного анализа некоторых современных распространенных алгоритмов минимизации БФ используем современный алгоритм минимизации, обеспечивающий получение глобального экстремума $МДНФ_{\min \min}$ путем синтеза инфимумных дизъюнктивных нормальных форм (ИДНФ) БФ, то есть точных нижних границ по критерию суммарного ранга всех конъюнкций ИДНФ $r_{\Sigma \min}$ [3].

Алгоритм синтеза ИДНФ БФ, то есть глобального экстремума $МДНФ_{\min \min}$, представленного в терминах n -мерного куба E^n , реализуется на основе совершенной матричной расстановки (СМР)[4].

Реализация алгоритма синтеза ИДНФ БФ [5] осуществляется в несколько этапов:

1. Для заданного числа n переменных функций $f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ определяются все n -разрядные двоичные комбинации номеров вершин куба E^n от 000...0 до 111...1.

2. Для заданной БФ определяются вершины подмножества $N_f \subseteq E^n$, для которых $f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = 1$.

3. Для каждой вершины подмножества N_f определяются все возможные геометрические соседи по всем n определенным в пределах СМР n -мерного куба E^n . Таким образом организуются все возможные покрывающие кубы E^1 (ребра) для всех вершин подмножества N_f .

4. В определенной совокупности покрывающих кубов E^1 (ребер) производится приведение подобных (эквивалентных) покрывающих интервалов, которые содержат одинаковые вершины. В результате приведения остается только один покрывающий интервал из каждой группы эквивалентности.

5. Организуются все возможные покрывающие кубы E^2 (грани) для каждого куба E^1 в пределах подмножества вершин N_f по всем возможным переменным. Если преобразование $E^i \rightarrow E^{i+1}$ невозможно, то преобразуемый покрывающий интервал E^i является максимальным покрывающим интервалом покрытой совокупности вершин и входит в максимальное покрытие вершин $N_{f_{\max}}$ подмножества N_f . Понятно, что приведение эквивалентных покрывающих интервалов осуществляется на всех возможных этапах построения кубов $E^i E^i$.

6. Объединение максимальных покрывающих N_f интервалов все совокупностей вершин подмножества обеспечивает максимальное оптимальное покрытие $N_{f_{\max}}$, что определяет $f_{\text{ИДНФ}}(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = 1$, то есть глобальный оптимум $\text{МДНФ}_{\min \min}$ с рангом $r_{\Sigma \min}$.

На всех этапах построения покрывающих кубов E^i одновременно преобразуются все вершины подмножества N_f , на котором $f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = 1$, что принципиально отличает глобальный алгоритм синтеза $\text{МДНФ}_{\min \min}$ (ИДНФ) от локальных алгоритмов со всеми их недостатками.

Для проведения сравнительного анализа некоторых современных распространенных алгоритмов минимизации БФ используем алгоритм синтеза $\text{МДНФ}_{\min \min}$.

Для тестирования были выбраны следующие программы минимизации:

1. Simple Solver – пакет булевой логики, который может быть использован для разработки таблиц истинности и сокращения булевых уравнений [6].

2. Online minimization of Boolean functions. Программа выполняет онлайн оптимизацию булевых функций, которые заданы уравнениями или таблицей истинности [7].

3. Logic Friday – программное обеспечение для оптимизации логических выражений, анализа и синтеза булевых функций. Logic Friday использует espresso для минимизации и misII для синтеза диаграмм [8].

4. Karma (KARnaugh Maps – логический синтез – Quine-McCluskey алгоритм) представляет собой набор инструментов логического синтеза, в том числе карты Карно, Квайна-Мак-Класки минимизации, и другие программы [9].

5. Karnaugh Minimizer – это инструмент для разработчиков цифровых устройств, которые используют булевы функции и карты Карно. При количестве переменных 2/8 используются карты Карно, при 9/23 переменных – Quine-McClusky минимизация [10].

Для каждой программы были созданы таблицы истинности. Результаты работы программ представлены в виде минимизированных функций, которые были нормализованы для проведения оценки относительно идеальной программы

синтеза ИДНФ БФ. Оценка качества минимизации заданных в виде ДНФ булевых функций рассчитывается из количества созданных конъюнкций, которые составляют соответственные минимальные ДНФ для каждой программы. Сравнительная оценка ранга соответствующих МДНФ не использовалась, поскольку критерия количества конъюнкций, созданных МДНФ оказалось достаточно.

Количество конъюнкций минимальных ДНФ каждой программы минимизации оценивалась для $n = 4/1$.

1. Количество переменных $n = 4$.

Программа Karnaugh Minimizer минимизировала булеву функцию хуже, чем другие программы, то есть минимальная ДНФ содержит 5 конъюнкций, а все другие программы имеют по 4 конъюнкции.

2. Количество переменных $n = 5$.

Программы Logic Friday и Karnaugh Minimizer имеют увеличенное число конъюнкций по сравнению со всеми остальными программами: $МДНФ_{LF} = 12 > 11$ $МДНФ_{KM} = 14 > 11$, то есть эти программы работают плохо.

3. Количество переменных $n = 6$.

Программа Online minimization полностью не работают. Программа Logic Friday имеет число конъюнкций $МДНФ_{LF} = 15 > 14$, а Karnaugh Minimizer $МДНФ_{KM} = 15 > 14$, то есть эти программы работают плохо.

4. Количество переменных $n = 7$.

Программы Online minimization, Karma не работают. Программа Logic Friday при $МДНФ_{LF} = 24 > 22$ и программа Karnaugh Minimizer при $МДНФ_{KM} = 28 > 22$ работают плохо.

5. Количество переменных $n = 8$.

Программы Online minimization, Karma не работают. Программа Logic Friday при $МДНФ_{LF} = 43 > 41$ и программа Karnaugh Minimizer при $МДНФ_{KM} = 53 > 41$, то есть работают плохо.

6. Количество переменных $n = 9$.

Программы Simple Solver, Online minimization, Karma, Karnaugh Minimizer не работают. Программа Logic Friday при $МДНФ_{LF} = 75 > 74$.

7. Количество переменных $n = 10$.

Программы Simple Solver, Online minimization, Karma, Karnaugh Minimizer не работают. Программа Logic Friday при $МДНФ_{LF} = 154 > 150$.

8. Количество переменных $n = 11$.

Все программы, за исключением Logic Friday и ИДНФ минимизация, не работают. Программа Logic Friday при $МДНФ_{LF} = 272 > 271$ работает очень плохо, а иногда совсем не работает.

9. Количество переменных $n = 12$.

Программы Simple Solver, Online minimization, Karma, Karnaugh Minimizer не работают. Программа Logic Friday работает плохо, так как $МДНФ_{LF} = 527 > 513$.

Количество дизъюнктивных МДНФ каждой из тестируемых программ для числа переменных $n = 4/12$, приведены в таблице 1.

Таблиця 1.

Количество членов дизъюнктивных МДНФ полученных при минимизации соответствующими программами.

Число переменных n БФ	ИДНФ минимизация	Simple Solver	Online minimization	Logic Friday	Karna	Karnaugh Minimizer	Без минимизации
4	4	4	4	4	4	5	13
5	11	11	11	12	11	14	22
6	14	22	-	15	14	15	49
7	22	41	-	24	-	28	88
8	41	-	-	43	-	53	186
9	74	-	-	75	-	-	370
10	150	-	-	151	-	-	731
11	271	-	-	272	-	-	1427
12	513	-	-	527	-	-	28293

Выводы

Таким образом, проведенный анализ показал, что ни одна из тестируемых программ не может обеспечить гарантированное получение $МДНФ_{\min \min}$ для большинства значений числа переменных $n = 4/12$ заданных БФ, вследствие локального характера минимизирующих преобразований.

Кроме того, многие тестируемые программы минимизации отказываются работать, начиная с $n > 6$. Гарантированно обеспечивает получение $МДНФ_{\min \min}$ (ИДНФ) в качестве точности нижней границы МДНФ только глобальный алгоритм ИДНФ минимизации, относительно которого и проводилось сравнение.

Список литературы

1. Дискретная математика и математические вопросы кибернетики (Под общ. ред. С.В.Яблонского и О.В.Лупанова). - М.: Наука, 1974.
2. Чернышев, Ю.Щ. Графовые представления переключательных функций, алгоритмы их оптимизации и моделирование / Ю.Щ. Чернышев // Гибридные вычислительные машины и комплексы. – К.: Наукова думка, 1974. –569 с.
3. Иванов, Ю.Д. Метод синтеза инфимумных дизъюнктивных нормальных форм логических функций / Ю.Д. Иванов // Тр. Одес. политехн. Ун-та. – 2006. – Вып. 1(25). – С.178-183.
4. Иванов, Ю.Д. Метод побудови досконалої матричної розстановки як основи синтезу диз'юнктивних нормальних форм булевої функції / Ю.Д. Иванов, В.М. Ніколаєнко, І.В. Пампуха // Вісник Київського національного університету ім. Т.Шевченка. Військово-спеціальні науки. – 2007. – Вып. 19'2007. – С.58-62.
5. Иванов, Ю.Д. Алгоритм синтеза инфимумных дизъюнктивных нормальных форм логических функций / Ю.Д. Иванов, О.С. Захарова // Тр. Одес. политехн. ун-та. – 2006. – Вып. 2(26). – С.167-172.
6. Online minimization of Boolean functions [Электронный ресурс] / Режим доступа: http://tma.main.jp/logic/index_en.html.
7. Logic Friday – free software for Boolean logic analysis [Электронный ресурс] / Режим доступа: <http://sontrak.com>.
8. Karma – Logic Circuit Synthesis Labs- Home [Электронный ресурс] / Режим доступа: <http://www.inf.ufrgs.br/logics/>.
9. Karnaugh Minimizer – Karnaugh Minimizer – Download [Электронный ресурс] / Режим доступа: <http://karnaugh-minimizer.en.softonic.com>

**ЕФЕКТИВНИЙ СПОСІБ МІНІМІЗАЦІЇ БУЛЕВИХ ФУНКЦІЙ НА ОСНОВІ ІНФІМУМНИХ
ДИЗ'ЮНКТИВНИХ НОРМАЛЬНИХ ФОРМ**

Ю.Д. Иванов

Одеський національний політехнічний університет,
просп. Шевченко 1, Одеса 65044, Україна; e-mail: iva.iurij2013@yandex.ua

Наводиться порівняльний аналіз відомих методів мінімізації булевих функцій. Пропонується оптимальний спосіб мінімізації булевих функцій, заснований на ІДНФ уявленнях булевих функцій.

Ключові слова: досконала діз'юнктивна нормальна форма, мінімальна діз'юнктивна нормальна форма, інфімумна діз'юнктивна нормальна форма

**EFFICIENT WAY MINIMIZATION OF BOOLEAN FUNCTIONS BASED ON INFIMUMNYH
DISJUNCTIVE NORMAL FORM**

Yu.Ivanov

Odessa national polytechnic university,
1 Shevchenko Ave., Odessa 65044, Ukraine; e-mail: iva.iurij2013@yandex.ua

The comparative analysis of the known methods of minimization of Boolean functions. It offers an optimal way to minimize Boolean functions based on infimumnyh disjunctive normal form of representation of Boolean functions.

Keywords: perfect disjunctive normal form, the minimum disjunctive normal form, infimumnaya disjunctive normal form

ІНФОРМАТИКА ТА МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ В МОДЕЛЮВАННІ

Том 5, номер 2, 2015. Одеса – 99 с., іл.

ИНФОРМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В МОДЕЛИРОВАНИИ

Том 5, номер 2, 2015. Одесса – 99 с., ил.

INFORMATICS AND MATHEMATICAL METHODS IN SIMULATION

Volume 5, No. 2, 2015. Odesa – 99 p.

Засновник: Одеський національний політехнічний університет

Зареєстровано Міністерством юстиції України 04.04.2011р.

Свідоцтво: серія КВ № 17610 - 6460Р

Друкується за рішенням Вченої ради Одеського національного політехнічного університету (протокол №8 від 28.04.2015)

Адреса редакції: Одеський національний політехнічний університет,
проспект Шевченка, 1, Одеса, 65044 Україна

Web: <http://www.immm.opu.ua>

E-mail: immm.ukraine@gmail.com

Автори опублікованих матеріалів несуть повну відповідальність за підбір, точність наведених фактів, цитат, економіко-статистичних даних, власних імен та інших відомостей. Редколегія залишає за собою право скорочувати та редагувати подані матеріали

© Одеський національний політехнічний університет, 2015