

**КОНЦЕПЦІЯ КІБЕРБЕЗПЕКИ ТА МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ
ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛІННЯ СИСТЕМОЮ КІБЕРЗАХИСТУ ДЕРЖАВИ****В.О. Хорошко, Ю.Є. Хохлачова, І.В. Кібальчик**Національний авіаційний університет,
пр. Любомира Гузара, 1, Київ, 03058, Україна; e-mail: post@nau.edu.ua

Система організації безпеки держави та її об'єктів в кожному випадку повинна бути індивідуальною. Як завжди, коли наявні ресурси малі (а їх ніколи не буває в надлишку), намагаємося визначити способи, як найкраще їх використовувати, щоб максимально ефективно захиститися від потенціальних загроз, як уникнути їх. Попередження злочину – це передбачення кримінальних ризиків, їхнє виявлення й оцінка, а також дії, спрямовані на їхнє усунення чи знищення. Виявлення особливостей конкретного об'єкта держави, у якому слід забезпечити належний захист інформації, є першим важливим етапом досягнення поставленої мети. Реалізація оптимального управління засобами обчислювальної техніки в реальному або прискореному часі не є складною. Для цього використовуються математичні моделі, які дозволяють описувати процеси оптимального управління системою кіберзахисту держави. Ці моделі дозволяють на стадії проектування або експлуатації системи контролювати або здійснювати управління процесами оптимізації в аналітичному вигляді.

Запропоновано метод моделювання процесів оптимального управління розподіленими системами (якою і є система кібербезпеки держави) на основі системи одновимірних диференціальних перетворень, які описують управління хвильовим процесом. Він дозволяє постійно контролювати та коригувати процес управління системою кібербезпеки держави, що дуже важливо щодо забезпечення загальної безпеки держави.

Ключові слова: кібербезпека, кіберзахист, безпека держави, система кібербезпеки держави, процес оптимального управління, моделювання процесів.

Вступ

При побудові системи кібербезпеки держави (СКБД) дуже важливо розуміти особливості кожного об'єкта держави, захист яких треба забезпечити. Саме звідси треба починати аналіз ризиків, на які може наражатися досліджувана структура. Причому треба врахувати те, що деякі особливості носять тимчасовий характер, а з цього випливає, що їх можна виявити тільки в тому випадку, якщо досліджувати об'єкт (держави та її елементів) не тільки в цілодобовому режимі роботи, але й, протягом повного робочого циклу.

Однак особливості держави та її елементів, що захищаються, залежить не тільки від часу, але й від виду діяльності об'єктів та їх місця розташування.

А звідси напрошується очевидний висновок – система організації безпеки держави та її об'єктів, причому в кожному випадку повинна бути індивідуальною. Як завжди, коли наявні ресурси малі (а їх ніколи не буває в надлишку), намагаємося визначити способи, як найкраще їх використовувати, щоб максимально ефективно захиститися від потенціальних загроз, як уникнути їх. Попередження злочину – це передбачення кримінальних ризиків, їхнє виявлення й оцінка, а також дії, спрямовані на їхнє усунення чи знищення.

Таким чином, виявлення особливостей конкретного об'єкта держави, у якому слід забезпечити належний захист інформації, є першим важливим етапом досягнення поставленої мети. [1 С.127].

Основна частина

Комплексна система безпеки повинна містити у собі:

- механічні засоби захисту, іншими словами фізичні перешкоди, що можуть використовуватися для відлякування потенційних порушників і для уповільнення швидкості їхнього проникнення на об'єкти, що охороняються;
- електронні засоби виявлення чи охоронні сигналізації, які повинні задовольняти чотирьом основним вимогам:
 - 1) надійно виявляти присутність зловмисника;
 - 2) надійно виявляти проникнення крізь фізичні охоронні бар'єри;
 - 3) вчасно пускати в хід сили та засоби відповідного реагування;
 - 4) не допускати помилкових спрацьовувань;
- електротехнічні засоби запобігання витоку інформації (різні генератори шуму, детектори, нелінійні локатори, аналізатори, виявлювачі і т.д.);
- програмні та криптографічні методи захисту, що забезпечують цілісність даних, досяжність даних конфіденційність даних і таємність;
- організаційні міри. Навіть самий захищений об'єкт, при охороні якого дотриманні високі стандарти, не може зберегти інформацію та обладнання у безпеці, якщо його користувачі не будуть дотримуватися елементарних запобіжних заходів. Тому важливо забезпечити управлінські процедури, дотримання яких дозволить створювати єдину та надійну систему безпеки об'єкта та держави в цілому.

Забезпечення безпеки інформації, яка має конфіденційний характер, у даний час набуває особливу актуальність. Крім цього, необхідно вирішувати задачі оптимального управління системи КБД, які є розподільними системами. При чому, розв'язування задачі управління в реальному часі вимагає моделювання процесів оптимального управління в прискореному часі з метою формування на основі моделювання управляючого впливу на розподілену систему КБД.

У сформульованих сучасних умовах задача забезпечення безпеки об'єктів та держави в цілому вимагає комплексного наукового підходу. Її вирішення для конкретного об'єкту доцільно починати з розробки концепції забезпечення безпеки. Концепція безпеки виражає загальний задум організації та реалізацію заходів для забезпечення захисту об'єктів держави від можливих загроз. Суть концепції забезпечення комплексної безпеки будь-якого об'єкта держави (рис.1) наполягає в перетворенні в життя трьох принципів [1, С.125]:

1. визначення цілей захисту (кого і що захищати?);
2. визначення і оцінка загроз (від кого захищати?);
3. розробка та реалізація адекватних мір захисту (як захищати?).

На державному об'єкті, що охороняється, в принципі існують три мети захисту [2]:

- люди (персонал об'єкта);
- майно (обладнання, цінності, документи);
- інформація (конфіденційна, службова та комерційна).

Цілі захисту утворюють простір загроз. В узагальненому виді основними видами загроз безпеки об'єкта та самої держави є [1, 2]:

- природні катаклізми та надзвичайні ситуації;
- розкрадання (втрата) майна;
- несанкціонована зйомка інформації, що містить конфіденційну, службову чи комерційну таємницю.

Система забезпечення комплексної безпеки об'єкта чи держави повинна бути сформована таким чином, щоб за допомогою людей, електронних, програмно-

Система забезпечення комплексної безпеки об'єкта чи держави повинна бути сформована таким чином, щоб за допомогою людей, електронних, програмно-

апаратних і технічних засобів ефективно протистояти перерахованим загрозам шляхом вживання адекватних заходів захисту [1,2].

Для цього повинні бути створенні та надійно функціонувати наступні підсистеми безпеки [2,С.195]:

- система захисту об'єкта при надзвичайних ситуаціях;
- система захисту об'єкта при випадкових помилках персоналу;
- система захисту об'єкта при несанкціонованих діях зловмисників.



Рис. 1. Концепція забезпечення захисту об'єкта

Одним з основних джерел (причин) виникнення надзвичайних ситуацій на об'єктах, крім природних і техногенних є злочинні несанкціоновані дії фізичних осіб (порушників). Слід зазначити, що в сучасних умовах несанкціоновані дії зловмисників становлять особливу небезпеку, тому що можуть привести до виникнення кожної із загроз, представлених на рис. 1.

Загрози, як можливі небезпеки здійснення будь-якої дії, спрямовані проти об'єкта захисту, виявляються не самі по собі, а через вразливості (фактори), що приводять до порушення безпеки інформації на об'єкті, що захищається.

Вразливості притаманні будь-якому об'єкту, що захищається, невіддільні від нього й обумовлюються недоліками експлуатації, розташування й процесу

функціонування систем, програмно-апаратними комплексами, які застосовуються в роботі системи захисту.

Існує загальна класифікація вразливостей [1,2]:

– об'єктивні вразливості залежать від особливості побудови та технічних характеристик обладнання, яке застосовується на об'єкті, що захищається. Повне усунення цих вразливостей неможливе, але вони можуть істотно послабитися технічними й інженерно-технічними методами захисту інформації;

– об'єктивні вразливості залежать від дії співробітників й усуваються організаційними та програмно-апаратними методами;

– випадкові вразливості залежать від особливостей навколишнього середовища об'єкту, що захищається, і непередбачених обставин.

Ці фактори, як правило, мало передбачувані й їхнє усунення можливе тільки при проведенні комплексу організаційних й інженерно-технічних заходів щодо протидії загрозам несанкціонованого отримання інформації.

На базі сформованої концепції змодельовано процеси управління системою кібернетичної безпеки держави.

Так як математична модель процесів оптимального управління містить опис процесу, яким управляють, у вигляді диференціальних рівнянь з частинними похідними, початкові та граничні умови; обмеження та оптимізуючий функціонал. Обмежуємося розглядом задач оптимально управління, в яких СКБД знаходяться під дією розподіленого лише в часі управління. Місце впливу вважається заданим.

На даний час найбільше розповсюдження для моделювання фізичних процесів отримали інтегральні перетворення [3 с. 231]. Однак, застосування інтегральних перетворень обмежується моделюванням фізичних процесів, які описуються лінійними диференціальними рівняннями з частинними похідними. На відміну від інтегральних, диференціальні перетворення дозволяють моделювати фізичні процеси, які описуються як лінійними, так і нелінійними диференціальними рівняннями з частинними похідними з лінійними та нелінійними крайовими умовами [45].

В роботах [6, 7] розглядалися методи моделювання процесів оптимального управління в області диференціальних перетворень тільки з об'єктами із зосередженими параметрами. Нам же треба вирішувати загрозу управління СКБД.

Розглянемо фізичні процеси, що описуються функцією $\theta(x, t)$ двох незалежних змінних в області, що визначається обмеженнями [8 с. 151]:

$$0 \leq x \leq H_x; 0 \leq t \leq H_t, \quad (1)$$

де H_x, H_t – задані додаткові сталі.

Обмежимося розглядом розподілених систем (СКБД), математична модель, яких допускає опис фізичних процесів у вигляді диференціальних рівнянь з частинними похідними в одній з двох формі:

$$\frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2} = \varphi_1 \left(x, t, \theta, \frac{\partial \theta}{\partial x}, \frac{\partial \theta}{\partial t}, \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial t}, \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right), \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2} = \varphi_2 \left(x, t, \theta, \frac{\partial \theta}{\partial x}, \frac{\partial \theta}{\partial t}, \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial t}, \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right) \quad (3)$$

До вигляду (2) та (3) можна звести лінійні й квазілінійні рівняння.

Надалі розглядаємо такі рівняння вигляду (2), (3), для яких можна застосувати принцип суперпозиції [9 с.354].

В момент часу $t=0$ стан фізичного процесу задається початковими умовами вигляду:

$$\theta(x, 0) = \varphi_1(x), \frac{\partial \theta}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi_2(x), \quad (4)$$

де φ_1, φ_2 задані неперервні функції. Будемо вважати, що управляючий вплив $u(t)$ зосереджено в граничних умовах:

$$\theta(0, t) = u(t), \theta(H_x, t) = 0, \quad (5)$$

Задача оптимального управління полягає в синтезі такого керуючого впливу $u(t)$, якого на фіксованого інтервалі часу $[0, H_t]$ переводить фізичний процес кіберзахисту з початкового стану (4) в заданий термінальний стан:

$$\theta(x, H_t) = 0, \frac{\partial \theta}{\partial t} \Big|_{t=H_t} = 0, \quad (6)$$

а функціонал

$$I(u) = \int_0^{H_t} u^2(t) dt, \quad (7)$$

повинен досягати мінімального значення.

Функціонал (7) характеризує витрати енергії на управління, яке переводить фізичний процес кіберзахисту в заданий термінальний стан (6).

Метод вирішення задачі оптимального управління полягає в реалізації наступних етапів:

1 етап. Управління кібербезпекою моделюємо функцією заданого вигляду:

$$u(t) = \theta(t, C), \quad (8)$$

де $C = (C_1, C_2, \dots, C_n)$ – вектор вільних коефіцієнтів апроксимуючої функції або ряду.

2 етап. На основі принципу суперпозиції [9 с. 403] розв’язок рівнянь (2) або (3), які описують фізичний процес кіберзахисту, представимо у вигляді суми двох доданків:

$$\theta(x, t, C) = \theta_1(x, t) + \theta_2(x, t, C), \quad (9)$$

де функція $\theta_1(x, t)$ описує вільну складову розв’язку, що виникає від ненульових початкових умов u при $u(t) = 0$, а функція $\theta_2(x, t, C)$ описує вимушену складову розв’язку, яка виникає під дією управління $u(t)$ при нульових початкових умовах

$$\theta(x, 0) = \frac{\partial \theta}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0. \quad (10)$$

3 етап. Визначаємо вектори вільних коефіцієнтів управління СКБД (8) шляхом розв’язку задачі мінімізації функції:

$$I(C) = \int_0^{H_t} \theta^2(t, C) dt, \quad (11)$$

при виконання термінальних умов

$$\theta(x, H_t, C) = 0, \quad \left. \frac{\partial \theta}{\partial t} \right|_{t=H_t} = 0. \quad (12)$$

Метод (8) ÷ (12) реалізуємо в області диференціальних перетворень [4, 5] на основі двох одномірних перетворень вигляду:

$$\bar{\theta}(x, k_1) = \frac{H_t^{k_1}}{k_1!} \left(\frac{\partial^{k_1} \theta(x, t)}{\partial t^{k_1}} \right)_{t=0}, \quad \theta(x, t) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \left(\frac{t}{H_t} \right)^{k_1} \bar{\theta}(x, k_1); \quad (13)$$

$$\bar{\theta}(k_2, t) = \frac{H_x^{k_2}}{k_2!} \left(\frac{\partial^{k_2} \theta(x, t)}{\partial x^{k_2}} \right)_{x=0}, \quad \theta(x, t) = \sum_{k_2=0}^{\infty} \left(\frac{x}{H_x} \right)^{k_2} \bar{\theta}(k_2, t), \quad (14)$$

де цілочисельні аргументи k_1 і k_2 приймають значення $0, 1, 2, 3, \dots$; $\bar{\theta}(x, k_1)$ і $\bar{\theta}(k_2, t)$ – зображення фізичного процесу кіберзахисту $\theta(x, t)$, який моделюється та $\bar{\theta}(x, k_1)$ і $\bar{\theta}(k_2, t)$ прийнято називати диференціальними спектрами.

При цьому слід враховувати, що на сьогоднішній день існування як інформаційно-обчислювальних систем, так і СКБД не можливо без дослідження й узагальнення світового досвіду їх побудови та їх складових підсистем, ключовим елементом яких є зокрема системи кіберзахисту. Математичним забезпеченням таких систем є моделі процесів оптимального управління. [7, 9]. Найвні математичні моделі та методи моделювання СКБД, на яких ґрунтуються концепції та процеси моделювання оптимального управління, не враховуючи динаміку зміни множини можливих управлінь і варіацій параметрів системи як у реальному або прискореному часі. Тому базисом таких моделей та процесів моделювання є математичний апарат, який базується на теорії оптимального управління хвильового процесу [9, С.318], а саме оптимального управління затуханням коливань.

Моделювання процесів оптимального управління розподіленими СКБД (1) ÷ (7) на основі реалізації методу (8) ÷ (12) в області диференціальних перетворень (13) ÷ (14) розглянемо на прикладі оптимального управління затуханням коливань [9 с.126]. Так як диференціальний процес описується хвильовим рівнянням:

$$\frac{\partial^2 \theta^*}{\partial \tau^2} = a^2 \frac{\partial^2 \theta^*}{\partial y^2}$$

де $\theta^*(y, \tau)$ – відхилення точок коливального середовища від положення рівноваги в просторовій точці y на час τ , a – швидкість розповсюдження коливань в середовищі, що моделюється.

Розглянемо коливання середовища в межах просторового відрізка $[0, \pi]$.

Перейдемо до нових змінних:

$$t = a\tau, \quad x = y, \quad \theta = \frac{\theta^*}{\theta_{\max}}$$

де θ_{max} – максимальне допустиме відхилення точок коливального середовища.
Хвильове рівняння в нових змінних набуває вигляду

$$\frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2}, \quad (15)$$

в області

$$0 \leq x \leq \pi, 0 \leq t \leq T. \quad (16)$$

В початковий момент часу $t = 0$ маємо збурення фізичного процесу, яке описується початковими умовами:

$$\theta(x, 0) = 0, \frac{\partial \theta}{\partial t} \Big|_{t=0} = \cos \frac{x}{2}. \quad (17)$$

Задаємо граничні умови:

$$\theta(\pi, t) = 0, \theta(0, t) = u(t). \quad (18)$$

З (18) випливає, що управління $u(t)$ зосереджено в точці $x = 0$.

Потрібно знайти таке управління $u(t)$ на фіксованому інтервалі часу $[0, T]$, щоб фізичний процес за час $T = 2\pi$ досяг термінального стану, заданого умовами:

$$\theta(x, T) = 0, \frac{\partial \theta}{\partial t} \Big|_{t=T} = 0, \quad (19)$$

причому функціонал (7) при $H_t = T$ повинен досягти мінімального значення.

З теорії оптимального управління розподіленими коливальними системами [9 с.268], випливає що оптимальне управління можна апроксимувати відрізками ряду Фур'є:

$$u(t) = \begin{cases} u_1(t), & 0 \leq t \leq \pi \\ u_2(t), & \pi \leq t \leq 2\pi, \end{cases} \quad (20)$$

де $u_i = C_{0i} + C_{1i} \sin C_{3i}t + C_{2i} \cos C_{3i}t$, $i = 1, 2$, $C_{0i}, C_{1i}, C_{2i}, C_{3i}$ – вільні коефіцієнти, які потрібно визначити.

Згідно другого пункту методу вільну складову $\theta_1(x, t)$ розв'язку знаходимо як розв'язок рівняння (15) з початковими умовами (17) і нульовими граничними умовами (18). Розв'язок цієї задачі виконаємо в області диференціальних перетворень (13). Математична модель рівняння (15) в області зображень (13) має вигляд:

$$\bar{\theta}_1(x, k_1 + 2) = \frac{H_t^2}{(k_1 + 1)(k_2 + 2)} \cdot \frac{\partial^2 \bar{\theta}(x, k_1)}{\partial x^2}, \quad (21)$$

Початкові дискрети диференціального спектру $\bar{\theta}_1(x, k)$ визначаються з початкових умов (17) і з першого виразу диференціальних перетворень (13):

$$\bar{\theta}_1(x, 0) = 0, \bar{\theta}_1(x, 1) = H_t \cos \frac{x}{2}. \quad (22)$$

За рекурентним виразом (21), використовуючи початкові дискрети (22), розраховуємо диференціальний спектр при $k_1 = 0, 1, 2, 3, \dots$

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_1(x, 0) = 0; \bar{\theta}_1(x, 1) = H_t \frac{x}{2}; \bar{\theta}_1(x, 2) = 0; \\ \bar{\theta}_3(x, 3) = -\frac{1}{3!} \frac{H_t^3}{4} \cos \frac{x}{2}; \bar{\theta}_1(x, 4) = 0; \bar{\theta}_1(x, 5) = \frac{1}{5!} \frac{H_t^5}{16} \cos \frac{x}{2}; \bar{\theta}_1(x, 6) = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

За другим виразом диференціальних перетворень (13) і диференціального спектру (23) відновимо оригінал вільної складової розв'язку рівняння (15).

$$\begin{aligned} \theta(x, t) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \left(\frac{t}{H_t} \right)^{k_1} \bar{\theta}_1(x, k_1) = 2 \frac{t}{2} \cos \frac{x}{2} - \frac{2}{3!} \left(\frac{t}{2} \right)^3 \cos \frac{x}{2} + \frac{2}{5!} \left(\frac{t}{2} \right)^5 \cos \frac{x}{2} - \dots = \\ = 2 \left[\frac{t}{2} - \frac{1}{3!} \left(\frac{t}{2} \right)^3 + \frac{1}{5!} \left(\frac{t}{2} \right)^5 - \dots \right] \cos \frac{x}{2} = 2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{x}{2}. \end{aligned} \quad (24)$$

Вимушену складову $\theta_2(x, t, C)$ розв'язку рівняння (15) знаходимо при нульових початкових умовах (10) з граничними умовами (18) і управління (20).

Розв'язок цієї задачі виконаємо в області диференціальних перетворень (14), в якій зображення рівняння (15) має вигляд:

$$\bar{\theta}_2(k_2 + 2, t) = \frac{H_x^2}{(k_2 + 1)(k_2 + 2)} \frac{\partial^2 \bar{\theta}_2(k_2, t)}{\partial t^2}. \quad (25)$$

Початкові дискрети диференціального спектра $\bar{\theta}(k_2, t)$ визначаються за другою граничною умовою (18):

$$\bar{\theta}_2(0, t) = u(t), \bar{\theta}_2(1, t) = 0. \quad (26)$$

Дискрета $\theta_2(1, t) = 0$ дорівнює нулю, бо управління затуханням коливань фіксована в точці $x = 0$ і не залежить від зміни змінної x . Тому $\left. \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial x} \right|_{x=0} = 0$, а з першого виразу (14) слідує $\bar{\theta}_2(1, t) = 0$.

Диференціальний спектр $\bar{\theta}_2(k_2, t)$ розраховується за рекурентним виразом (25) і початковими дискретами (26) шляхом послідовного надання цілочисельному аргументу значень $k_2 = 0, 1, 2, 3, \dots$:

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_2(0, t) = u(t); \bar{\theta}_2(1, t) = 0; \bar{\theta}_2(2, t) = \frac{H_x^2}{2} u^{(2)}(t); \bar{\theta}_2(3, t) = 0; \\ \bar{\theta}_2(4, t) = \frac{H_x^2}{4!} u^{(4)}(t); \bar{\theta}_2(5, t) = 0; \end{aligned} \quad (27)$$

де використано позначення $u^{(n)}(t) = \frac{d^n u(t)}{dt^n}$, $n = 1, 2, 3, \dots$.

За другим виразом обернених диференціальних перетворень (14) знаходимо вимушену складову $\theta_2(x, t, C)$ розв'язку рівняння (15) шляхом підстановки управління $u(t)$ (20) і його похідних $u^{(n)}(t)$ в (27):

$$\begin{aligned} \theta_2(x, t, C) &= \sum_{k_2=0}^{\infty} \left(\frac{x}{H_x} \right)^{k_2} \bar{\theta}_2(k_2, t) = \\ &= C_{0i} + (C_{1i} \sin c_{3i}t + C_{2i} \cos C_{3i}t) \left[1 - \frac{(C_{3i}x)^2}{2!} + \frac{(C_{3i}x)^4}{4!} - \dots \right] = \\ &= C_{0i} + (C_{1i} \sin c_{3i}t + C_{2i} \cos C_{3i}t) \cos C_{3i}x. \end{aligned}$$

Перша гранична умова (18) виконується, якщо у виразі (28) при $x = \pi$ коефіцієнтам надати значення $C_{0i} = 0$, $C_{3i} = \frac{1}{2}$. З врахуванням цих значень коефіцієнтів математична модель фізичного процесу (19) описується сумою вільної (24) і вимушеної (28) складових, що складають розв'язок рівняння (15):

$$\theta(x, t, C) = 2 \sin \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2} + \left(C_{1i} \sin \frac{1}{2} + C_{2i} \cos \frac{t}{2} \right) \cos \frac{x}{2}. \quad (29)$$

Вираз (29) описує процес затухання коливання на часовому проміжку $[0, \pi]$ при $i = 1$. Як впливає в момент часу $t = \pi$ управління має розрив, який має місце в результаті переходу від управління $u_1(t)$ до управління $u_2(t)$. В результаті в момент часу $t = \pi$ маємо збурення фізичного процесу, яке описується виразом (29) при $t = \pi$:

$$\theta(x, \pi) = (2 + C_{11}) \cos \frac{x}{2}, \quad \left. \frac{\partial \theta}{\partial t} \right|_{t=\pi} = -\frac{C_{21}}{2} \cos \frac{x}{2}. \quad (30)$$

Введемо новий часовий аргумент $\bar{t} = t - \pi$ розглянемо фізичний процес затухання коливань на часовому проміжку $\bar{t} \in [0, 2\pi]$ або $\bar{t} \in [0, \pi]$. З врахування введення часового аргументу $\bar{t} = t - \pi$ зараз (30) задає початкові умови при $\bar{t} = 0$:

$$\theta(x, \bar{t} = 0) = (2 + C_{11}) \cos \frac{x}{2}, \quad \left. \frac{\partial \theta}{\partial t} \right|_{\bar{t}=0} = -\frac{C_{21}}{2} \cos \frac{x}{2}. \quad (31)$$

Математична модель рівняння (15) в області зображень (21) не залежить від часового аргументу і тому може використовуватись для моделювання фізичного процесу на часовому проміжку $\bar{t} \in [0, \pi]$. Послідовно надаючи цілочисельному аргументу значення $k_1 = 0, 1, 2, 3, \dots$ за рекурентним виразом (21) при початкових дискрета, заданих умовами (31):

$$\bar{\theta}_1(x, 0) = (2 + C_{11}) \cos \frac{x}{2}; \quad \bar{\theta}_1(x, 1) = H_i \frac{C_{21}}{2} \cos \frac{x}{2},$$

розрахуємо диференціальний спектр зображення вільної складової розв'язку рівняння (15) на часовому проміжку $\bar{t} = [0, \pi]$

$$\begin{aligned}
 \bar{\theta}_1(x, 0) &= (2 + C_{11}) \cos \frac{x}{2}; \bar{\theta}_1(x, 1) = -H_t \frac{C_{21}}{2} \cos \frac{x}{2}; \\
 \bar{\theta}_1(x, 2) &= -\frac{1}{4}(2 + C_{11}) \frac{H_t^2}{2} \cos \frac{x}{2}; \bar{\theta}_1(x, 3) = \frac{C_{21}}{8} \frac{H_t^3}{3!} \cos \frac{x}{2}; \\
 \bar{\theta}_1(x, 4) &= \frac{1}{16}(2 + C_{11}) \frac{H_t^4}{4!} \cos \frac{x}{2}; \bar{\theta}_1(x, 5) = \frac{C_{21}}{32} \frac{H_t^5}{5!} \cos \frac{x}{2} \dots
 \end{aligned} \quad (32)$$

Оригінал вільної складової розв'язку рівняння (15) на часовому проміжку $\bar{t} \in [0, \pi]$ відновлюємо за другим виразом диференціальних перетворень (13) на основі диференціального спектру (22):

$$\begin{aligned}
 \theta_1(x, \bar{t}) &= \sum_{k_1=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{t}}{H_t} \right)^{k_1} \bar{\theta}_1(x, k_1) = \\
 &= (2 + C_{11}) \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{t}}{2} \right)^2 + \frac{1}{4!} \left(\frac{\bar{t}}{2} \right)^4 - \dots \right] - C_{21} \left[\frac{\bar{t}}{2} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\bar{t}}{2} \right)^3 + \frac{1}{5!} \left(\frac{\bar{t}}{2} \right)^5 - \dots \right] \cos \frac{x}{2} = \\
 &= \left[(2 + C_{11}) \cos \frac{\bar{t}}{2} - C_{21} \sin \frac{\bar{t}}{2} \right] \cos \frac{x}{2}.
 \end{aligned} \quad (33)$$

Вимушена складова розв'язку рівняння (15) на часовому проміжку $\bar{t} \in [0, \pi]$ визначається виразом (28) при $i = 2$, $C_{02} = 0$, $C_{32} = \frac{1}{2}$, так як зображення (25) рівняння (15) і початкові дискрети (26) зберігають свій вигляд крім зміни управління $u_1(t)$ на управління $u_2(t)$. Отже, вимушена складова $\theta_2(x, \bar{t}, z)$ (28) розв'язку рівняння (15) на часовому проміжку $\bar{t} \in [0, \pi]$ має вигляд:

$$\theta_2(x, \bar{t}, \bar{C}) = \left(C_{12} \sin \frac{\bar{t}}{2} + C_{22} \cos \frac{\bar{t}}{2} \right) \cos \frac{x}{2}. \quad (34)$$

Математична модель фізичного процесу затухання коливань на часовому проміжку $\bar{t} \in [0, \pi]$ визначається сумою вільної (33) і вимушеної (34) складових розв'язку рівняння (15):

$$\theta_2(x, \bar{t}, \bar{C}) = \left[(2 + C_{11} + C_{22}) \cos \frac{\bar{t}}{2} + (C_{12} - C_{21}) \sin \frac{\bar{t}}{2} \right] \cos \frac{x}{2}. \quad (35)$$

Підстановка (35) в термінальні умови (19) при $t = T = 2\pi$ або $\bar{t} = \pi$ дає наступні співвідношення між коефіцієнтами:

$$C_{12} - C_{21} = 0; 2 + C_{11} + C_{22} = 0.$$

Перейдемо до реалізації третього пункту метода. Підставимо управління (20) при $C_{0i} = 0$, $C_{31} = \frac{1}{2}$, $i = 1, 2$ в функціонал (7) дозволяє перетворити його в функцію вільних коефіцієнтів:

$$I(C) = \int_0^{\pi} U_1^2(t) dt + \int_{\pi}^{2\pi} U_2^2(t) dt = \frac{\pi}{2} (C_{11}^2 + C_{21}^2 + C_{12}^2 + C_{22}^2). \quad (37)$$

Задача визначення вільних коефіцієнтів управління (20) звелась до задачі мінімізації функції (37) при виконанні умов у формі рівностей (36). Ця задача може бути розв'язана методом прямої підстановки або методом множників Лагранджа [3]. Розв'яжемо задачу умовної оптимізації (36) і (37) методом прямої підстановки.

З рівностей (36) випливає:

$$C_{11} = C_{21}, C_{22} = -2 - C_{11}. \quad (38)$$

Підстановка (38) в (37) дозволяє звести оптимізаційну задачу (36) і (37) до задачі безумовної мінімізації функції двох змінних:

$$I(C_{11}, C_{12}) = \frac{\pi}{2} [C_{11}^2 + 2C_{12}^2 + (2 + C_{11})^2]. \quad (39)$$

З необхідних умов екстремуму функції (39) отримаємо систему двох рівнянь для визначення C_{11} і C_{12} :

$$\frac{\partial I}{\partial C_{11}} = \pi(C_{11} + 2 + C_{11}) = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial C_{12}} = 2\pi C_{12} = 0. \quad (40)$$

З рівнянь (40) випливає $C_{11} = 1, C_{12} = 0$. Підстановка цих значень вільних коефіцієнтів в (39) визначає інші невідомі коефіцієнти:

$$C_{12} = C_{21} = 0, C_{11} = -1, C_{22} = -1. \quad (41)$$

Дослідження достатніх умов існування екстремуму в точці (41) показує, що функція (39) досягає в цій точці мінімуму.

До системи коефіцієнтів (41) слід додати коефіцієнти, які були знайдені раніше з граничної умови (18):

$$C_{01} = C_{02} = 0, C_{31} = C_{32} = \frac{1}{2}. \quad (42)$$

Підстановка значень вільних коефіцієнтів (41) і (42) у вираз (20) дає оптимальне управління коливаний пружного середовища в такому вигляді:

$$u(t) = \begin{cases} -\sin \frac{t}{2}, & 0 \leq t \leq \pi \\ -\cos \frac{t}{2}, & \pi \leq t \leq 2\pi. \end{cases} \quad (43)$$

Таким чином, моделювання процесів оптимального управління затуханням коливаний пружного середовища в області диференціальних перетворень дозволило отримати в прикладі, який розглянуто, оптимальне управління в аналітичному вигляді (43).

Висновки

Реалізація оптимального управління засобами обчислювальної техніки в реальному або прискореному часі не є складною. Для цього використовуються

математичні моделі, які дозволяють описувати процеси оптимального управління системою кіберзахисту держави. Ці моделі дозволяють на стадії проектування або експлуатації системи контролювати або здійснювати управління процесами оптимізації в аналітичному вигляді.

Запропонований метод моделювання процесів оптимального управління розподіленими системами (якою і є система кібербезпеки держави) на основі системи одномірних диференціальних перетворень, які описують управління хвильовим процесом. Він дозволяє постійно контролювати та коригувати процес управління системою кібербезпеки держави, що дуже важливо щодо забезпечення загальної безпеки держави.

Список літератури

1. Хорошко В.О., Хохлячова Ю.Є. Показатели для оценки живучести системы информационной безопасности государства. *Інформаційна безпека*, 2018, № 4 (32). С. 123-129.
2. Хорошко В.О., Хохлячова Ю.Є. Підхід до вибору засобів захисту з урахуванням їх оцінок. Інформаційні технології проблеми та перспективи: колективна монографія. Харків: Вид. Рожко Р.Г., 2017. С. 187-203.
3. Сейдж Э.П. Уайт Ч.С. Оптимальное управление системами. М.: Радио и связь, 1982. 392 с.
4. Пухов Г.Е. Дифференциальные преобразования и математическое моделирование физических процессов. К.: Наук. думка, 1986. 158с.
5. Пухов Г.Е. Дифференциальные спектры и модели. К.: Наук. думка, 1990. 184 с.
6. Баранов В.Л., Фролова Е.Г., Баранов Г.Л. Метод смещенных дифференциальных преобразований для решения многокритериальных задач управления. *Електроніка і зв'язь*. 2002, № 16. С.25 – 28.
7. Грищук Р.В. Теоретичні основи моделювання процесів нападу на інформацію методами теорій диференціальних ігор та диференціальних перетворень. Житомир: Рута, 2010. 280с.
8. Баранов В.Л. Капустен М.В., Костюченко Р.В., Хорошко В.О. Моделювання фізичних процесів в інформаційній безпеці. К.: ДУІКТ, 2010. 175 с.
9. Фельдбаум А.А., Бутковский А.Г. Методы теории автоматического управления. М.: Наука, 1971. 744 с.

THE CONCEPT OF CYBER SECURITY AND SIMULATION OF PROCESSES OF OPTIMAL CONTROL OF THE STATE CYBER PROTECTION SYSTEM

V.O. Khoroshko, Y.E. Khokhlachova, I.V. Kibalchich

National Aviation University,
Lubomyr Husar Ave., 1, Kyiv, 03058, Ukraine; e-mail: post@nau.edu.ua

The system of security organization of the state and its facilities in each case must be individual. As always, when available resources are small (and they are never in excess), we try to identify ways to best use them to best protect against potential threats, how to avoid them. Crime prevention is the anticipation of criminal risks, their detection and assessment, as well as actions aimed at their elimination or destruction. Identifying the specifics of a particular state object, in which the proper protection of information should be ensured, is the first important standard for achieving this goal. Implementation of optimal control of computer equipment in real or accelerated time is not difficult. For this purpose, mathematical models are used, which allow to describe the processes of optimal management of the state cyber defense system. These models allow at the stage of system design or operation to control or manage optimization processes in an analytical form.

A method for modeling the processes of optimal control of distributed systems (which is the system of cyber security of the state) based on a system of one-dimensional differential transformations that describe the control of the wave process is proposed. It allows you to constantly monitor and adjust the process of managing the state cyber security system, which is very important for ensuring the overall security of the state.

Keywords: cyber security, cyber defense, state security, state cyber security system, optimal management process, process modeling.