

**РОЗРАХУНОК ЦИФРОВИХ ФІЛЬТРІВ В СЕРЕДОВИЩІ MATLAB**

С. О. Клімович, В. В. Кузавков

Військовий інститут телекомунікацій та інформатизації імені Героїв Крут  
м. Київ, Україна; e-mails: robota\_ks@ukr.net, nevse@ukr.net

Цифрові фільтри застосовуються в системах цифрової обробки сигналів (ЦОС) для вирішення двох основних задач: розділення (двох і більше сигналів) та відновлення сигналів, які були спотворені. Задача відновлення сигналів вирішується у тих випадках, коли первинний сигнал реєструється у спотвореному вигляді. Такі задачі можуть вирішуватись програмними та апаратними методами. В системах радіозв'язку при передачі (прийманні) інформації, первинний сигнал, який реєструється від джерела, окрім коливань, які обумовлені інформаційною складовою, буде вміщувати складові обумовлені іншими фізичними процесами. Фільтр повинен забезпечувати таке розділення корисного сигналу і завади, після котрого відбудеться безпомилкове приймання переданої інформації та (або) визначення параметрів завади (навмисного або природнього походження).

Якщо відома імпульсна характеристика системи, можливо вирахувати її реакцію на сигнал довільної форми. Для цього вхідний сигнал представляється у вигляді сукупності імпульсних сигналів з одиничним нульовим відліком, кожний з яких може розглядатися як одиничний імпульс помножений на деяку величину зсунуту по часу. Реакція системи на кожний вхідний імпульс отримується шляхом підсилення та зсуву імпульсної характеристики системи. Сигнали складної форми розкладаються на прості складові за допомогою імпульсної декомпозиції. В наслідок чого загальна реакція системи на вхідний сигнал обраховується шляхом додавання реакцій системи на усі компоненти декомпозиції окремо.

В статті, на основі білінійного z-перетворення, проведено аналіз електричних фільтрів які можливо застосовувати в цифрових засобах зв'язку спеціального призначення.

Метою дослідження є створення програмної складової, яка б забезпечила можливість автоматичного розрахунку параметрів з метою побудови ЦФ з певними параметрами. Хід виконання розрахунку наведено у вигляді опорного алгоритму з низкою вхідних даних та обмежень. Основні характеристики цифрового фільтра (характеристика загасання та фазова характеристика) визначаються та візуалізуються в програмному середовищі Matlab через створену програмну складову розрахунку ЦФ.

**Ключові слова:** нормована частота, коефіцієнт пропорційності, z-перетворення, функція Золотарьова – Кауєра, Чебишева, Батерворта.

**Вступ**

Для вирішення поставлених задач обробки сигналів можливо використовувати аналогові фільтри, проте цифрові фільтри дозволяють досягнути високої точності, а також характеристик які значно перевищують аналогові пристрої [1]. Реалізація аналогових фільтрів, як правило, найбільш вигідна з фінансової точки зору. Також ці фільтри мають більш високу швидкодію та більш широкий динамічний діапазон по амплітуді та частоті. В свою чергу цифрові фільтри перевершують аналогові за точністю відтворення частотних характеристик. У зв'язку з цим значно відрізняються підходи до розрахунку і проектування аналогових та цифрових фільтрів. Для аналогових фільтрів важливо врахувати обмеження, обумовлені елементною базою, такі як стабільність та точність параметрів пасивних компонентів схеми. Цифрові фільтри, як правило, дозволяють досягнути заданої точності, тому першочерговим значенням

отримують проблеми пов'язані з обмеженістю динамічного діапазону. Розрахунки фільтрів зручно проводити в спеціалізованих математичних програмах, однією з яких є Matlab, котра вже має набір відповідних функцій та значно полегшує обчислення.

### Огляд літератури

Аналіз останніх публікацій свідчить, що розрахунок (проекування) цифрових та аналогових фільтрів на етапі апроксимації є процесом знаходження передаточної функції. В літературі [2–6] розглядається метод розкладання апроксимуючої функції в ряд Фур'є, а також знаходження передаточної функції за відомими часовими характеристиками, де не наведено програмований метод розрахунку.

В літературі [7–10] зазначено такі методи апроксимації для рекурсивних ЦФ: узгодженого з-перетворення; білінійного перетворення; інваріантності імпульсної характеристики, при цьому не наведена програма розрахунку ЦФ. В літературі [11] не наведено програмної складової розрахунку білінійного z-перетворення ЦФ з деталізованим відображенням практичної реалізації. Варто зазначити, що розрахунки ЦФ з використанням білінійного z-перетворення є громіздкими та потребують значного часу, при цьому автоматизація (створення програмної складової) розрахунку ЦФ з використанням білінійного z-перетворення має складний характер побудови та розглянута не в повному обсязі.

### Виклад основного матеріалу

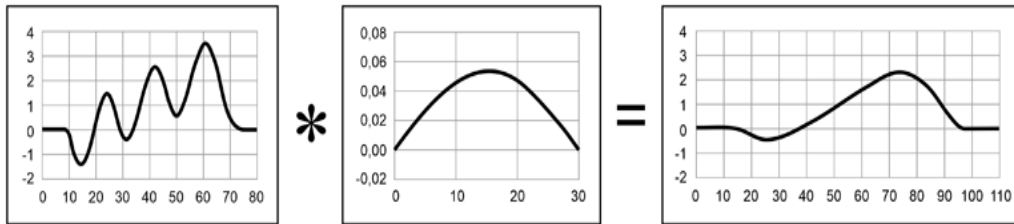
Найважливішим поняттям для цифрової обробки сигналів та цифрових фільтрів є дельта-функція  $\delta(t)$  або функція Дірака, котра представляє собою нескінченно вузький імпульс з безкінечною амплітудою, розташованою при нульовому значенні аргументу функції [1]. При цьому площа імпульсу рівна одиниці. Дельта-функцію неможливо реалізувати фізично, однак вона дуже важлива для теоретичного аналізу сигналів та систем. Для дискретних систем використовується поняття дискретної дельта-функції  $\delta(n)$ . Вона називається одиничним імпульсом або одиничним відліком, представляючи собою сигнал в котрому нульовий відлік має значення одиниці, а всі інші рівні нулю.

Наступним важливим поняттям є імпульсна характеристика системи  $h[n]$ , яка представляє собою реакцію системи на одиничний імпульс. Якщо дві системи мають будь-які різності то їх імпульсні характеристики будуть різнитися. Сигнали складної форми можливо розкласти на прості складові за допомогою імпульсної декомпозиції. Імпульсний сигнал котрий являється компонентом розкладання при імпульсній декомпозиції може бути представлений як одиничний імпульс зсунутий на відповідну величину по часовій вісі та помножений на значення відліку вихідного сигналу в цей самий момент часу. Таким чином, якщо відома імпульсна характеристика системи, можливо вирахувати реакцію системи на сигнал довільної форми. Для цього вхідний сигнал шляхом декомпозиції представляється у вигляді сукупності імпульсних сигналів з одиничним нульовим відліком, кожний з яких може розглядатися як одиничний імпульс помножений на деяку величину зсунути по часу. Реакція системи на кожний вхідний імпульс отримується шляхом відповідного підсилення та зсуву імпульсної характеристики системи. В результаті чого загальна реакція системи на вхідний сигнал обчислюється шляхом додавання реакцій системи на усі компоненти декомпозиції окремо. Обчислення вихідного сигналу за вхідним сигналом та імпульсною характеристикою виконується за допомогою операції згортки (\*). Для обчислення вихідного сигналу  $y(n)$  необхідно визначити згортку відповідно до виразу (1):

$$y[n] = x[n] \times h[n], \quad (1)$$

де:  $x[n]$  – вхідний сигнал;  $h[n]$  – імпульсна характеристика.

Графічний приклад обрахунку згортки для фільтра нижніх частот представлений на рисунку 1.

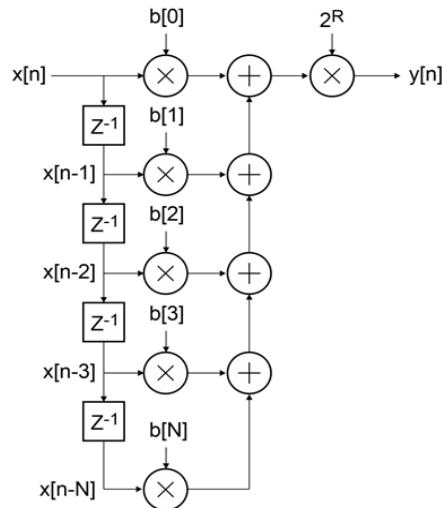


**Рис. 1.** Згортка для фільтра нижніх частот. Згортка будь-якого сигналу з одиничним імпульсом відповідає самому сигналу:  $x[n] \times \delta[n] = x[n]$ .

Якщо змінити одиничний імпульс помноживши його на постійний множник отримаємо систему котра працює в якості підсилювача або атенюатора в залежності від величини множника. Таким чином, властивість згортки дозволяє проектувати цифрові фільтри з широким набором властивостей.

Цифрові фільтри поділяються на два види – фільтри з кінцевою імпульсною характеристикою (КІХ) або нерекурсивні та фільтри з нескінченною імпульсною характеристикою (НІХ) або рекурсивні [1].

Приклад структури КІХ-фільтру наведено на рисунку 2.



**Рис. 2.** Структура КІХ фільтру

Робота КІХ-фільтру описується виразом:

$$y(n) = b_0x(n) + b_1x(n - 1) + \dots + b_px(n - p). \quad (2)$$

Вираз (2) відображає згортку вхідного сигналу з набором коефіцієнтів фільтра.

КІХ-фільтри мають високу стійкість та дозволяють отримувати довільні амплітудно-частотну характеристику та фазо-частотну характеристику. Проте вони споживають більше обчислювальних ресурсів в порівнянні з НІХ – фільтрами та мають більші часові затримки.

Приклад структури НІХ-фільтру наведено на рисунку 3, а його функціонування описується виразом:

$$y(n) = b_0x(n) + b_1x(n - 1) + \dots + b_px(n - p) - a_1y(n - 1) - a_2y(n - 2) - \dots - a_qy(n - q).$$

НІХ-фільтри мають наступні переваги: висока швидкодія та низька собівартість в порівнянні з КІХ-фільтрами, наявність аналогових прототипів.

Недоліками є те, що амплітудно-частотну характеристику (АЧХ) необхідно вибирати з існуючих реальних фільтрів-прототипів.

Розглянемо приклад проектування КІХ-фільтру з використанням віконної функції Хемінга (3).

На першому етапі визначаємось з ідеальною АЧХ фільтру.

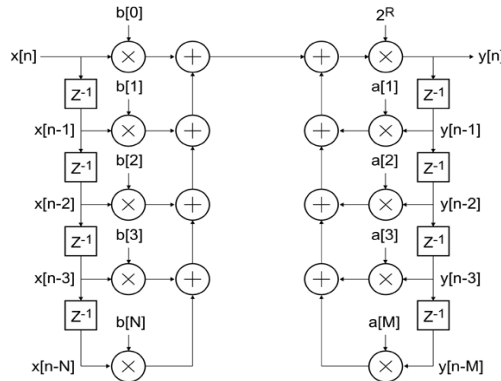


Рис. 3. Структура НІХ-фільтру

АЧХ ідеального фільтру має коефіцієнт передачі рівний нулю в смузі завади та одиниці в смузі пропускання корисного сигналу. Відповідно до частоти дискретизації формула АЧХ виглядає наступним чином:

$$D_p(f) = \begin{cases} 1, & 0 \leq f \leq f_{\text{с.п.}}, \\ 0, & f_{\text{с.з.}} \leq f \leq \frac{f_d}{2}, \end{cases}$$

де:  $f_{\text{с.п.}}$  – гранична частота смуги пропускання;  $f_{\text{с.з.}}$  – гранична частота смуги затримки;  $f_d$  – частота дискретизації.

Використовуємо віконну функцію Хемінга:

$$\omega_k = \begin{cases} 0,54 - 0,46 \cdot \cos\left(\frac{2\pi k}{N-1}\right), & 0 \leq k \leq N-1, \\ 0, & k < 0, \quad k > N-1, \end{cases} \quad (3)$$

де:  $N$  – число коефіцієнтів фільтру.

КІХ-фільтр може бути заданий коефіцієнтами імпульсної характеристики  $\{h(n)\}$ . Коефіцієнти нерекурсивного фільтру відповідають відлікам імпульсної характеристики кола.

Для обрахунку коефіцієнтів імпульсної характеристики необхідно обрахувати зворотне дискретне перетворення Фур'є:

$$h(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) \cdot e^{\frac{j2\pi nk}{N}}.$$

При цьому відбувається множення кожного відліку вихідної імпульсної функції на відлік віконної функції з тим самим порядковим номером ( $k$ ):

$$h_{\omega k} = h_k \cdot \omega_k. \quad (4)$$

У відповідності до (4) отримуємо набір коефіцієнтів для проектування КІХ-фільтру. Для побудови реальної АЧХ фільтру здійснюється пряме дискретне перетворення Фур'є.

Здійснення розрахунків параметрів фільтру за наведеним прикладом із застосуванням програмного середовища Matlab ускладнено. Тому розглянемо інший варіант обчислення параметрів фільтру на основі  $z$ -перетворення:

$$z = e^{pT}; \quad z^{-1} = e^{-pT}.$$

Розрахунок ЦФ базується на використанні передаточної функції відповідного фільтра-прототипа нижніх частот. Період дискретизації ( $T$ ) обирається відповідно до теореми відліків (теорема Котельникова) [4]:

$$T = \frac{1}{2f_{max}},$$

де  $f_{max}$  – максимальна частота у спектрі сигналу, який передається.

Метою дослідження є створення програмної складової, яка б забезпечила можливість автоматичного розрахунку параметрів з метою побудови ЦФ з певними параметрами.

Для пояснення програмної складової та ходу виконання процесів розрахунку в роботі наводяться основні етапи опорного алгоритму (рис.6):

введення початкових даних;

знаходження коефіцієнта пропорційності;

знаходження нормованої частоти затримки аналогового ФНЧ-прототипу і порядку фільтра;

отримання знаменника нормованої передаточної функції аналогового ФНЧ-прототипу;

знаходження передаточної функції ЦФ з використанням білінійного з-перетворення.

Для функціонування програмної складової потрібні наступні вхідні дані:  $\omega_{п}$  – гранична частота смуги пропускання,  $\omega_{з}$  – гранична частота смуги затримки,  $T$  – період дискретизації,  $\Delta a$  – нерівномірність загасання в смузі пропускання,  $a_0$  – загасання в смузі затримки, вид апроксимації.

До обмежень відносимо відповідність отриманого порядку фільтра:

$$n_{min} \geq n_{пот} \geq n_{max} \quad (5)$$

Розв'язання задачі розрахунку ЦФ на основі Matlab розділено на етапи:

1. Розрахунок коефіцієнта пропорційності:

$$K = \text{ctg} \frac{\omega_{п} \cdot T}{2}.$$

2. Розрахунок нормованої частоти затримки аналогового ФНЧ-прототипу:

$$\Omega_{з} = K \text{tg} \frac{\omega_{з} \cdot T}{2}.$$

3. Розрахунок порядку фільтра (при використанні функції Батерворта):

$$n \geq \frac{\lg \frac{10^{0,1a_0-1}}{10^{0,1\Delta a-1}}}{2 \lg \Omega_{з}}.$$

4. Перевірка виконання умови (5). При виконанні зазначеної умови відбувається перехід до блоку 5 алгоритму. В іншому випадку – до блоку 8 алгоритму.

5. Розрахунок знаменника нормованої передаточної функції аналогового ФНЧ-прототипу  $H(\lambda)$  (коефіцієнти якої знаходять в таблицях за відомими: загасанням, порядком фільтра та видом апроксимації):

$$H(\lambda) = C(\lambda - \alpha_1)(\lambda^2 - 2\alpha_1\lambda + \nu_2), \nu_2 = \alpha_2^2 + \beta_2^2; \lambda = \frac{j\omega}{\omega_{п}}.$$

де  $C$  – коефіцієнт з довідника [12].

6. Розрахунок передаточної функції ЦФ низьких частот з використанням білінійного  $z$ -перетворення  $k \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$ :

$$K(\lambda) = \frac{1}{H(\lambda)}. \quad (6)$$

7. Розрахунок характеристики загасання (рис. 4) та фазової характеристики (рис. 5).

Визначення характеристики загасання ФНЧ:

$$a(\Omega) = 20 \lg C + 10 \lg[(\Omega^2 + \alpha_1^2)^2] + 10 \lg[\alpha_2^2 + (\Omega - \beta_2)^2] + 10 \lg[\alpha_2^2 + (\Omega + \beta_2)^2]$$

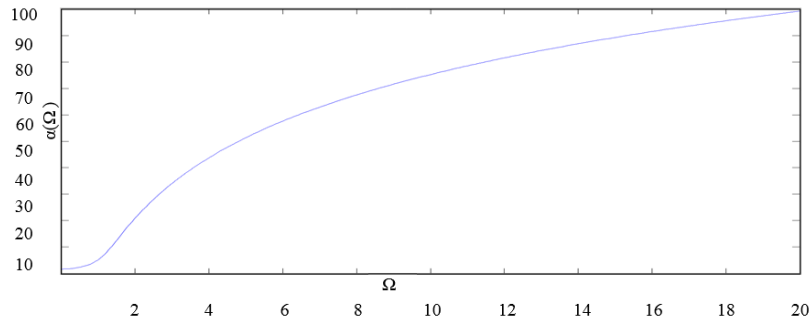


Рис. 4. Графік загасання ФНЧ

Визначення фазової характеристики ФНЧ:

$$\beta(\Omega) = \sum_{v=1}^{n_1} \arctg \frac{\Omega}{(-a_v)} + \sum_{v=n_1+1}^{n_2} \left[ \arctg \frac{\Omega - \beta_v}{(-a_v)} + \arctg \frac{\Omega + \beta_v}{(-a_v)} \right].$$

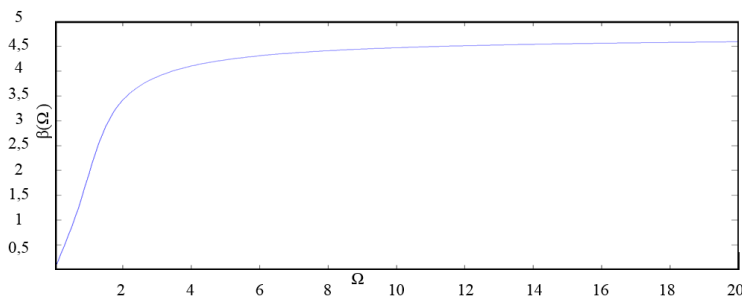


Рис. 5. Графік фазової характеристики ФНЧ

Відповідно до отриманих  $z$ -показників та виразу (6) можливо здійснити проектування ЦФ в пакеті Simulink, що являє собою блокове моделювання без використання мови Matlab, що дозволяє відстежити процес обробки даних в часі. Simulink надає можливість побудувати графічні блок-діаграми та дослідити працездатність ЦФ. За рахунок того, що складову Simulink інтегровано в Matlab, результати розрахунку програмної складової ЦФ, які проводилися вище, використаємо для отримання вихідних показників фільтра.

На рис. 6 побудована структурна схема ЦФ.

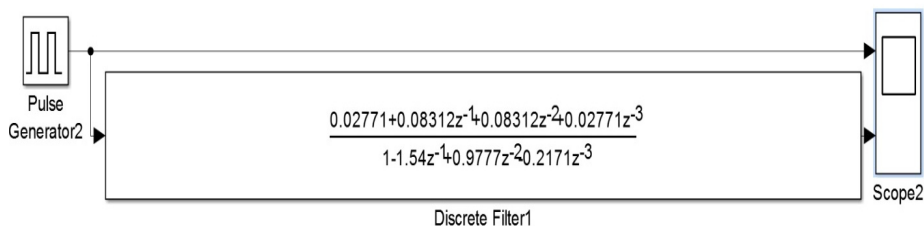
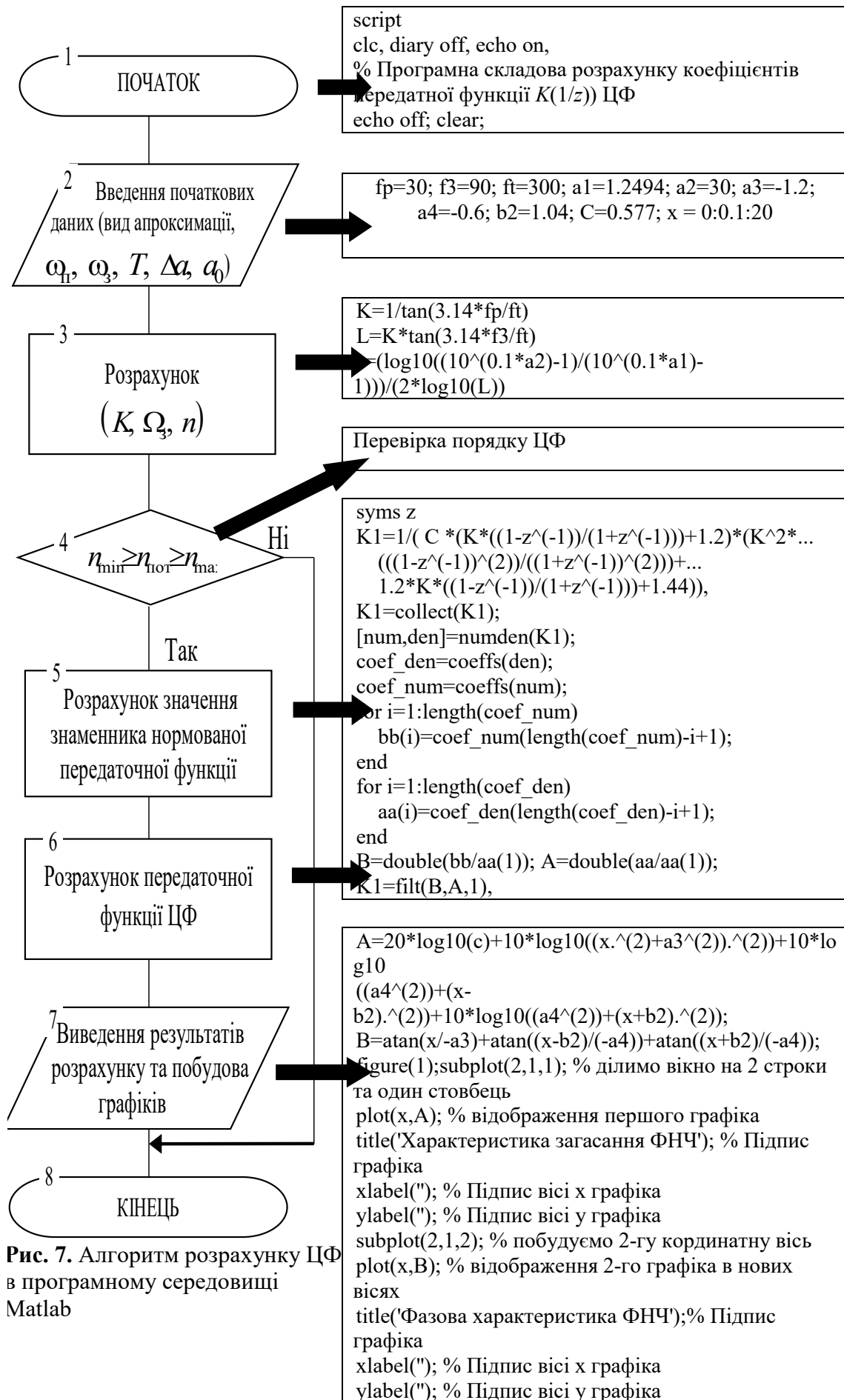


Рис. 6. Структурна схема з Discrete Filter

Етапи та програмна складова розрахунку коефіцієнтів ЦФ відповідно до алгоритму представлена на рис. 7.



На рис. 8 відображено властивості блоку ЦФ відповідно до отриманих показників програмної складової.

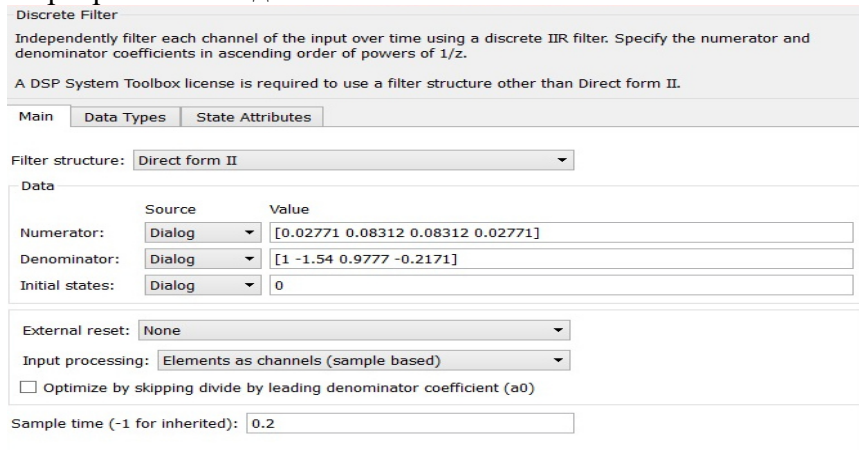


Рис. 8. Властивості блоку Discrete Filter

Перевірку фільтруючої дії ЦФ НЧ продемонструємо при подачі на вхід ЦФ послідовності прямокутних відеоімпульсів.

Отримані сигнали, що надходять на осцилограф (Scope2) з генератору (Pulse Generator2) та ЦФ (Discrete Filter1), зображені на рис. 9.

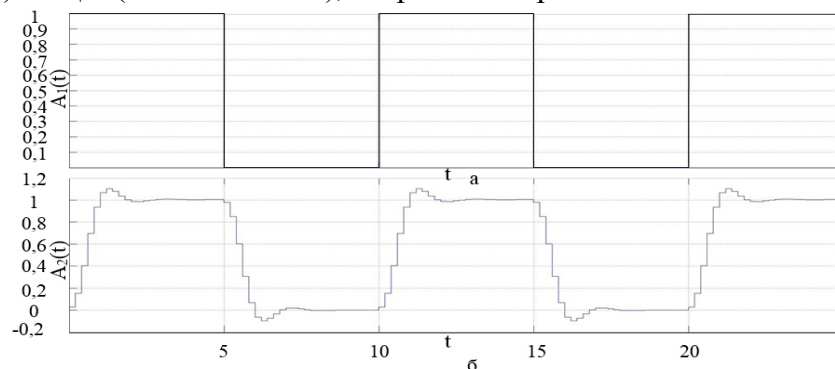


Рис. 9. Результат роботи ЦФ на Scope2

Візуалізація результатів обчислень на основі z-перетворення та алгоритму наведеного на рисунку 6 доводить працездатність запропонованого програмного модуля синтезу ЦФ. Сигнал, отриманий (рис.9,б) відповідає фільтру з “широкою” смугою пропускання (сигнал рис.9,а відповідає ідеальному фільтру з нескінченною смугою).

### Висновки

Представлена програмна складова розрахунку ЦФ з використанням Matlab дозволяє визначити основні параметри ЦФ, а саме: коефіцієнт пропорційності; нормовану частоту затримки аналогового ФНЧ-прототипу та порядок фільтру; знаменник нормованої функції аналогового ФНЧ-прототипу та передаточну функцію ЦФ; зменшити час розрахунків та полегшити побудову характеристики загасання та фазової характеристики ЦФ; отримати схему ФНЧ 3-го порядку з можливістю формування збільшеного порядку шляхом нарощування елементів схеми.

Реалізація програмної складової в пакеті Simulink дозволяє здійснити процес компіляції створеного проекту і зменшити витрату часу на проектування ЦФ.

Запропонований підхід для визначення необхідних характеристик (параметрів) фільтрів може бути застосований для фільтрів Батерворта, Чебишева, Золотарьова – Кауера, смугових фільтрів.



Подальшим напрямком досліджень є вирішення задачі реалізації отриманої програмної складової з використанням цифрових сигнальних процесорів.

### Список літератури

1. Філатова Г. Є. Проектування цифрових фільтрів. Х.: НТУ «ХП», 2017. 120 с.
2. Белодедов М. В. Методы проектирования цифровых фильтров. Волгоград: Издательство Волгоградского государственного университета, 2004. 64 с.
3. Солонина А. И., Арбузов С. М. Цифровая обработка сигналов. Моделирование в MATLAB. СПб.: БХВ-Петербург, 2008. 816 с.
4. Белецкий А.Ф. Теория линейных электрических цепей. М.: Радио и связь, 1986. 544с.
5. Оппенгейм А., Шафер Р. Цифровая обработка сигналов. М., 2006. 856 с.
6. Бойко В. С. Теоритичні основи електротехніки. К., 2004. 268 с.
7. Сериков С. А., Бороденко Ю. Н., Дзюбенко А. А. Методы преобразования и обработки сигналов. Синтез цифровых фильтров. Х., 2008. 60 с.
8. Сергиенко А. Б. Цифровая обработка сигналов : учебник. СПб.: Питер, 2002. 608 с.
9. Баскаков С. И. Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Высш. шк., 2003. 462 с.
10. Антонью А. Цифровые фильтры: анализ и проектирование. М.: Радио и связь, 1983. 320 с.
11. Клімович С. О., Мотора Є. М., Боголій С. М. Методика розрахунку цифрових фільтрів на основі MATLAB. *Збірники наукових праць ВІПІ*. 2017. № 4. С. 45-49.
12. Зааль Р. Справочник по расчету фильтров. М.: Радио и связь, 1988. 752 с.

## DESIGN OF DIGITAL FILTERS IN THE MATLAB ENVIRONMENT

S. Klimovych, V. Kuzavkov

Military Institute of Telecommunication and Information technologies named after the Heroes of Kruty,  
Kyiv, Ukraine; e-mails: robota\_ks@ukr.net, nevse@ukr.net

Digital filters are used in digital signal processing (DSP) systems to solve two main problems: separation (of two or more signals) and restoration of signals that have been distorted. The task of restoring signals is solved in those cases when the primary signal is registered in a distorted form. Such tasks can be solved by software and hardware methods. In radio communication systems, when transmitting (receiving) information, the primary signal that is registered from the source, in addition to oscillations caused by the information component, will contain components caused by other physical processes. The filter must provide such a separation of the useful signal and the interference, after which the transmitted information will be received without error and (or) the parameters of the interference (intentional or natural origin) will be determined. If the impulse characteristic of the system is known, it is possible to calculate its response to a signal of arbitrary shape. For this, the input signal is represented as a set of pulse signals with a single zero count, each of which can be considered as a single pulse multiplied by some time-shifted value. The response of the system to each input pulse is obtained by amplifying and shifting the impulse response of the system. Signals of complex form are decomposed into simple components using impulse decomposition. As a result, the overall response of the system to the input signal is calculated by adding the responses of the system to all components of the decomposition separately. In the article, on the basis of the bilinear z-transformation, an analysis of electrical filters that can be used in digital means of special purpose communication is carried out. The purpose of the research is to create a software component that would provide the possibility of automatic calculation of parameters in order to build a CF with certain parameters. The progress of the calculation is given in the form of a reference algorithm with a number of input data and restrictions. The main characteristics of the digital filter (attenuation characteristic and phase characteristic) are determined and visualized in the Matlab software environment through the created software component for calculating the digital filter.

**Keywords:** normalized frequency, proportionality coefficient, z-transformation, Zolotaryov-Kauer, Chebyshev, Butterworth function.