

**ДИФРАКЦІЯ ПЛОСКИХ ГАРМОНІЧНИХ ХВИЛЬ НА ЖОРСТКОМУ
ЦИЛІНДРИЧНОМУ ВКЛЮЧЕННІ
ДОВІЛЬНОГО ПОПЕРЕЧНОГО ПЕРЕРІЗУ**

Б.С. Панченко¹, Ю.О. Гунченко², Л.М. Тимошенко³,
Л.Я. Мартинович⁴, М.В. Северін⁵

^{1,5}Державний університет інтелектуальних технологій та зв'язку
1, Кузнечна вул., Одеса, 65000, Україна

^{2,4}Одеський національний університет ім. Мечникова
2, Всеволода Змієнка, Одеса, 65082, Україна

³ Національний університет «Одеська політехніка»
1, Шевченка пр., 65044, Одеса, Україна

Emails: pr-bob@ukr.net¹, gunchenko@onu.edu.ua², l.m.timoshenko@op.edu.ua³,
larysa.yaroslavna@onu.edu.ua⁴, n_severin@ukr.net⁵

Високоточним чисельним дослідженням апробовано математичну модель, засновану на методі сингулярних інтегральних рівнянь. Досліджено крайову задачу про дифракцію плоских пружних стаціонарних хвиль на жорсткому циліндричному включенні довільного поперечного перерізу, розташованому в нескінченній ізотропному середовищі. Система сингулярних інтегральних рівнянь розв'язується обчислювальним методом механічних квадратур. Використано додаткові умови у інтегральній формі. Для підвищення точності результатів застосовано розпаралелювання алгоритму. Наводиться аналіз напружено-деформованого стану границі включення. Досліджено параметри механічних полів на неоднорідності ромбічної форми. Наприклад, отримано те, що при порівнянні результатів для різних типів хвиль, що взаємодіють з включенням, можна зробити висновок, що є принципова відмінність у розподілі контурних напружень при набіганні на жорстке включення хвилі розширення-стиснення (Р-випадак) чи хвилі зсуву (SV-випадак). У Р-випадку нормальне контурне напруження досягає локальних максимумів в лобовій та тіньовій точках відповідно. У SV-випадку нормальне напруження у цих точках дорівнюють нулю і досягають максимуму в околі точки зісковзування. Дотичне напруження в Р-випадку в лобовій і тіньовій точках дорівнюють нулю, а його максимум досягається поблизу точки зісковзування. У SV-випадку нормальне напруження приймає максимальне значення в лобовій точці і має локальний максимум поблизу точки зісковзування. При збільшенні параметра відносної щільності включення спостерігається збільшення нормального напруження у Р-випадку та дотичного у SV-випадку поблизу лобової точки та їх зменшення в околі тіньової точки. А максимум дотичного напруження у Р-випадку та нормального у SV-випадку зміщується з тіньової області в освітлену. Крім того, у Р-випадку переважають нормальне напруження, а значення параметра відносної щільності практично не впливає на значення цього напруження в точці зісковзування.

Ключові слова: плоскі гармонічні хвилі, дифракція, сингулярні інтегральні рівняння, чисельний експеримент, жорстке включення.

Вступ. Дифракцію плоских гармонічних хвиль на відбивачах складної геометричної форми ефективно моделює метод інтегральних рівнянь [1,2]. У [2] цим методом вперше досліджено плоску динамічну задачу про коливання ізотропного середовища з пружним включенням довільного поперечного перерізу. У представленій тут роботі метод інтегральних рівнянь, запропонований в [2,3], використовується для чисельного аналізу механічних параметрів хвильового поля у випадку дифракції плоских хвиль на жорсткому («прухомому», проте абсолютно жорсткому) циліндричному включенні довільного поперечного перерізу.

В [2] зазначено, що запропонований там алгоритм моделювання дифракції плоских пружних хвиль має властивість не лише теоретичного, а й чисельного розв'язання окремих випадків, коли відбивачами є отвори [4], нерухомі [5] або рухомі абсолютно жорсткі включення [3] – завдяки варіантності вихідних параметрів.

Постановка задачі. Розглянемо у необмеженому ізотропному середовищі з коефіцієнтами Ламе λ , μ та щільністю ρ нескінченно довгий вздовж осі Ox_3 циліндр, поперечний переріз якого обмежений замкненим контуром L типу Ляпунова. Передбачається, що циліндр є абсолютно жорстким тілом зі щільністю ρ_0 . У середовищі, перпендикулярно осі циліндра, поширюється гармонійна (залежність від часу виражається множителем $e^{-i\omega t}$) хвиля розширення-стиснення (P -випадок):

$$U_1^{(0)} = 0, U_2^{(0)} = \tau_1 e^{-i\gamma_1 x_2}, \gamma_1 = \frac{\omega}{c_1}, c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \tau_1 = const \quad (1)$$

або хвиля зсуву (SV -випадок):

$$U_1^{(0)} = \tau_2 e^{-i\gamma_2 x_2}, U_2^{(0)} = 0, \gamma_2 = \frac{\omega}{c_2}, c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \tau_2 = const \quad (2)$$

де c_1 і c_2 - швидкості поздовжньої та поперечної хвиль у матриці, ω - частота коливань, $i^2 = -1$

Взаємодіючи зі включенням, хвиля, що набігає, породжує відбиті поздовжні та поперечні хвилі. Їхня сукупність визначає напружено-деформований стан середовища, який потрібно визначити. Наслідуючи принцип суперпозиції [1,2], загальне поле амплітуд переміщень і компонент тензора напружень будемо шукати у вигляді:

$$U_n = U_n^{(0)} + U_n^{(1)}, \tau_{mn} = \tau_{mn}^{(0)} + \tau_{mn}^{(1)}, \\ \tau_{mn} = \lambda \delta_{mn} (U_{1,1} + U_{2,2}) + \mu (U_{m,n} + U_{n,m}), m, n = 1, 2. \quad (3)$$

Тут $U_n^{(0)}$, $\tau_{mn}^{(0)}$ і $U_n^{(1)}$, $\tau_{mn}^{(1)}$ - амплітуди компонент вектора переміщень та тензора напружень падаючого і відбитого хвильових полів відповідно, δ_{mn} - символ Кронекера. Відбите поле переміщень повинно задовольняти умові випромінювання на нескінченності, а також рівнянню руху [1]. Крім того, на поверхні жорсткого включення повинні виконуватись граничні умови:

$$U_1 = B_1 - \omega_0 \eta, U_2 = B_2 + \omega_0 \xi, \zeta = \xi + i\eta \in L \quad (4)$$

де B_1 , B_2 і ω_0 - амплітуди поступального руху та жорсткого повороту включення.

Метод дослідження. Представлення амплітуд переміщень відбитого хвильового поля будемо шукати у вигляді потенціалів типу простого шару [1,2] (підсумовування $n = 1, 2$):

$$U_k^{(1)}(M) = \int_L V_n^{(k)}(M, P) p_n(s) ds, k = 1, 2, \quad (5)$$

де $p_n(s)$ - невідомі функції; $V_n^{(k)}$ - компоненти матриці Гріна, що являють собою амплітуди переміщень у точці M при дії гармонічної сили, прикладеної у точці $P \in L$ та спрямованої вздовж осі Ox_1 ($k = 1$) або вздовж осі Ox_2 ($k = 2$).

Амплітуди переміщень $V_n^{(k)}$ та відповідних компонентів тензора напружень $\sigma_{mn}^{(k)}$ визначаються із співвідношень ($k, m, n = 1, 2$):

$$V_n^{(k)} = (-1)^{n+k} L_{nk} G, \sigma_{mn}^{(k)} = \lambda \delta_{mn} (V_{1,1}^{(k)} + V_{2,2}^{(k)}) + \mu (V_{m,n}^{(k)} + V_{n,m}^{(k)}), \\ (\Delta + \gamma_1^2)(\Delta + \gamma_2^2)G = c \delta(x_1 - \xi, x_2 - \eta), c = -\frac{1}{\mu(\lambda + 2\mu)},$$

$$G(M, P) = \frac{c}{4i} \frac{H_0^{(1)}(\gamma_1 r) - H_0^{(1)}(\gamma_2 r)}{\gamma_2^2 - \gamma_1^2}. \quad (6)$$

Тут $H_j^{(1)}(x)$ функція Ханкеля першого роду j -го порядку, Δ - оператор Лапласа.

Використовуючи фундаментальне рішення $G(M, P)$, для комбінацій переміщень $V_n^{(k)}$ отримуємо такі вирази:

$$\begin{aligned} V_1^{(1)} + iV_2^{(2)} &= d \left(\frac{\chi}{4} \Phi_{20} - (0,5 - \nu) \gamma_2^2 \Phi_{00} \right), \quad V_1^{(2)} = V_2^{(1)}, \\ e^{2i\alpha} (V_1^{(1)} - 2iV_1^{(2)} - V_2^{(2)}) &= e^{-2i\alpha} (V_1^{(1)} + 2iV_1^{(2)} - V_2^{(2)}) = \frac{d}{4} \Phi_{22}, \quad d = \frac{i}{4\mu(1-\nu)}, \\ \Phi_{l,j} &= \frac{\gamma_1^l H_j^{(1)}(\gamma_1 r) - \gamma_2^l H_j^{(1)}(\gamma_2 r)}{\gamma_1^2 - \gamma_2^2}, \quad z - \zeta = r e^{i\alpha}, \quad z = x_1 + ix_2, \quad \chi = 3 - 4\nu, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}. \end{aligned} \quad (7)$$

Аналіз формул (7) показує, що функції $V_1^{(1)} - 2iV_1^{(2)} - V_2^{(2)}$ та $V_1^{(1)} + 2iV_1^{(2)} - V_2^{(2)}$ безперервні в нулі, а функція $V_1^{(1)} + iV_2^{(2)}$ має логарифмічну особливість. Це означає, що задоволення граничних умов (4) зводить крайову задачу до системи інтегральних рівнянь із логарифмічними ядрами, чисельна реалізація яких є ускладненою. Тому, з метою отримання сингулярних інтегральних рівнянь з ядрами типу Коші, граничні умови (4) диференціювалися за дуговою координатою S_0 і записувалися у вигляді:

$$\frac{d(U_1 + iU_2)}{ds_0} \Big|_L = i\omega_0 e^{i\varphi_0}, \quad \frac{d(U_1 - iU_2)}{ds_0} \Big|_L = -i\omega_0 e^{-i\varphi_0}, \quad \frac{dW}{ds_0} \Big|_L = \left(\frac{\partial W}{\partial z} e^{i\varphi_0} + \frac{\partial W}{\partial \bar{z}} e^{-i\varphi_0} \right)_{z \rightarrow \zeta_0}, \quad (8)$$

де φ_0 - кут позитивної дотичної до L в точці $\zeta_0 = \xi_0 + i\eta_0 \in L$ з віссю Ox_1 , $\bar{z} = x_1 - ix_2$.

Система сингулярних інтегральних рівнянь. В роботах [2,3] надано методіку розв'язання цієї крайової задачі. Отже, задовольняючи граничні умови (8), приходимо до системи сингулярних інтегральних рівнянь першого роду з ядрами типу Коші (підсумовування для $n=1, 2$):

$$\begin{aligned} \int_L B_{mn}(s_0, s) f_n(s) ds - M_m(s_0) \omega_0 &= -N_m(s_0), \quad m = 1, 2; \\ B_{12} &= \frac{d}{8} \left(-\frac{2}{\pi i} \frac{e^{i\varphi_0} - e^{i(2\alpha_0 - \varphi_0)}}{\zeta - \zeta_0} + F_{31}^0 e^{i(\varphi_0 + \alpha_0)} - F_{33}^0 e^{i(3\alpha_0 - \varphi_0)} \right), \\ B_{21} &= \frac{d}{8} \left(-\frac{2}{\pi i} \frac{e^{-i\varphi_0} - e^{-i(2\alpha_0 - \varphi_0)}}{\zeta - \zeta_0} + F_{31}^0 e^{-i(\varphi_0 + \alpha_0)} - F_{33}^0 e^{-i(3\alpha_0 - \varphi_0)} \right), \\ B_{11} = B_{22} &= -d \left(\frac{\chi}{2\pi i} \frac{\cos(\varphi_0 - \alpha_0)}{r_0} + \left(\frac{\chi}{4} F_{31}^0 - (0,5 - \nu) \gamma_2^2 \Phi_{11}^0 \right) \cos(\varphi_0 - \alpha_0) \right), \\ f_1(s) &= p_1(s) + ip_2(s), \quad f_2(s) = p_1(s) - ip_2(s), \quad M_1 = i\omega_0 e^{i\varphi_0}, \quad M_2 = \bar{M}_1, \\ \Phi_{l,j}^0 &= \frac{\gamma_1^l H_j^{(1)}(\gamma_1 r_0) - \gamma_2^l H_j^{(1)}(\gamma_2 r_0)}{\gamma_1^2 - \gamma_2^2}, \quad \zeta_0 - \zeta = r_0 e^{i\alpha_0}, \quad F_{31}^0 = -\frac{2i}{\pi r_0} + \Phi_{31}^0, \quad F_{33}^0 = -\frac{2i}{\pi r_0} + \Phi_{33}^0, \end{aligned} \quad (9)$$

$N_1 = -N_2 = \gamma_1 \tau_1 e^{-i\gamma_1 \eta_0} \sin \varphi_0$ для P -хвилі, $N_1 = N_2 = -i\gamma_2 \tau_2 e^{-i\gamma_2 \eta_0} \sin \varphi_0$ - для SV .

Аналіз ядер системи рівнянь (9) показує, що ядра B_{11} и B_{22} є сингулярними, а B_{12} и B_{21} - неперервними.

Необхідні для замикання алгоритму три додаткові умови впливають із законів поступального та оберտального руху абсолютно жорсткого тіла. Для поступального руху, виходячи з другого закону Ньютона, отримуємо:

$$\int_L S_1 ds = -\omega^2 \rho_0 S_0 B_1, \quad \int_L S_2 ds = -\omega^2 \rho_0 S_0 B_2, \quad (10)$$

а рівняння, що описує обертальний рух, запишемо у вигляді:

$$\int_L (S_1(\eta - a_2) - S_2(\xi - a_1)) ds = -\omega^2 J_A \omega_0, \quad (11)$$

де S_1 і S_2 - амплітуди компонент вектору напружень на контурі L ; S_0 - площа включення, обмеженого контуром L ; J_A - момент інерції включення відносно точки $A(a_1, a_2)$; постійні B_1 та B_2 визначаються згідно (4).

Чисельна реалізація. Як і в [1-3], для чисельної реалізації алгоритму використовувався метод механічних квадратур [6]. Розпаралелювання алгоритму здійснювалося аналогічно [3].

Як приклад розглянемо середовище, що містить жорстке циліндричне включення ромбічної форми зі закругленими кутами [7]:

$$\xi(\beta) = a(\sin \beta - \mathcal{G} \sin 3\beta), \quad \eta(\beta) = -b(\cos \beta + \mathcal{G} \cos 3\beta), \quad 0 \leq \beta \leq 2\pi \quad (12)$$

де при $\mathcal{G} = 0.14036$ контур має форму ромба (у випадку $\mathcal{G} = 0$ контур має еліптичну форму $\xi = a \sin \beta$, $\eta = -b \cos \beta$, $0 \leq \beta \leq 2\pi$).

На границі включення проводилося обчислення безрозмірних напружень

$$\sigma_n = |\tau_n|/P, \quad \sigma_s = |\tau_s|/P, \quad \sigma_{ns} = |\tau_{ns}|/P, \quad (13)$$

де τ_n , τ_{ns} - амплітуди нормального та тангенціального напруження на L ; τ_s визначається із співвідношення $\tau_s + \tau_n = \tau_{11} + \tau_{22}$; $P = \gamma_1 \tau_1 (\lambda + 2\mu)$ - максимальне напруження в P -хвилі (1), та $P = \gamma_2 \tau_2 \mu$ у разі SV -хвилі (2).

В роботі [3], де також використано метод [2], наведено чисельні результати, які дозволяють перевірити достовірність результатів цієї роботи. Зазначимо, що при дифракції поздовжньої (1) або поперечної (2) хвилі на жорсткому включенні з граничними умовами (4) та додатковими умовами (10)-(11) напруження σ_s завжди менше σ_n і пов'язане з ним співвідношенням $\sigma_s = \nu \cdot \sigma_n / (1 - \nu)$.

Також треба зазначити, що згідно з рекомендаціями [6] додаткові умови (10)-(11) можна моделювати як в будь-якій одній точці контуру, так і в інтегральному вигляді. Проте подальші високоточні численні дослідження показали, що при збільшенні значення безрозмірного хвильового числа $\gamma_{1,2} a$ для P - та SV -хвиль спостерігаються суттєві відмінності результатів. Тому тут використані лише «інтегральні» додаткові умови [6].

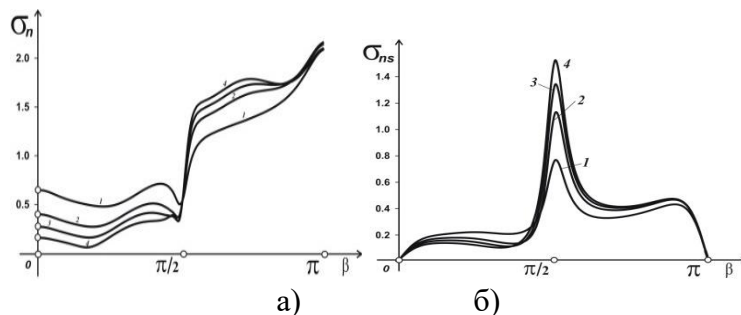


Рис. 1. Розподіл напружень разі набігання P - хвилі при $b/a = 0,5$ та $\nu = 0,3$

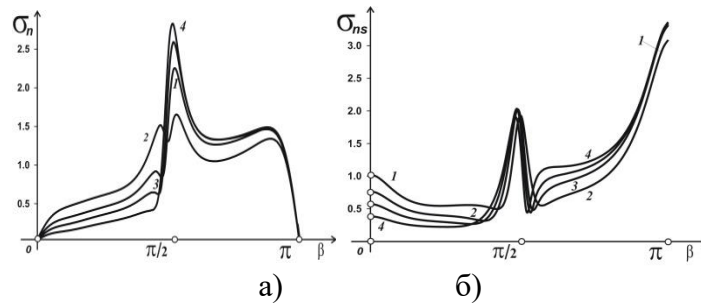


Рис. 2. Розподіл напружень разі набігання SV -хвилі при $b/a=0,5$ та $\nu=0,3$

На рис. 1 (а, б) та 2 (а, б) наведено розподіл напружень σ_n і σ_{ns} вздовж контуру ромбічного жорсткого включення (12) у разі набігання P - та SV -хвилі відповідно при $b/a=0,5$ та $\nu=0,3$, що для порівняння відповідають [3]. Проте тут, на відміну від [3], $\gamma_1 a = \gamma_2 a = 3,0$. Як і в [3], криві 1, 2, 3 та 4 відповідають значенням $\rho_0/\rho=0,5; 1,0; 2,0$ та $5,0$. Очевидно, що спостерігається збіг загального вигляду кривих. Проте суттєва залежність результатів від значення хвильового числа.

Висновки. У P -випадку напруження σ_n досягає локальних максимумів в лобовій $\beta=180^0$ та тіньовій $\beta=0^0$ точках відповідно. У SV -випадку напруження σ_n у цих точках дорівнюють нулю і досягають максимуму в околі точки зісковзування ($\beta=90^0$).

Напруження σ_{ns} в P -випадку в лобовій і тіньовій точках дорівнюють нулю, а їх максимум досягається поблизу точки зісковзування. У SV -випадку напруження σ_{ns} приймає максимальне значення в лобовій точці і має локальний максимум поблизу точки $\beta=90^0$.

При збільшенні параметра ρ_0/ρ спостерігається збільшення напружень σ_n у P -випадку та σ_{ns} у SV -випадку поблизу лобової точки та їх зменшення в околі тіньової точки. А максимум напружень σ_{ns} у P -випадку та σ_n у SV -випадку зміщується з тіньової області ($60^0 < \beta < 90^0$) у освітлену ($90^0 < \beta < 120^0$). Крім того, у P -випадку переважають напруження σ_n , а значення параметра ρ_0/ρ практично не впливає на значення цього напруження в точці зісковзування $\beta=90^0$.

Список літератури

1. Назаренко А.М. Вычислительные методы в задачах дифракции упругих волн на системах неоднородностей на базе сингулярных интегральных уравнений. Сумы: СумГУ, 2015. 220 с.
2. Панченко Б.Є. Розв'язання двовимірних задач дифракції пружних хвиль на циліндричних неоднорідностях. Автореферат дисертації на здобуття вченого ступеня кандидата фізико-математичних наук. Суми: Сумський державний університет, 1996. 19 с
3. Панченко Б.Є., Северин М.В. Математичне моделювання дифракції плоских гармонічних хвиль на жорсткому циліндричному включенні довільного поперечного перерізу. *Проблеми керування та інформатики*. 2024. № 3, С. 33-45.
4. Shibahara M., Taniuchi Y., Application of the integral equation method to the elastodynamic boundary-value problems. *Bull JSME*. 1983. Vol.26. No. 222. P.2054-2059.
5. Shibahara M., Taneto S., Kuroyanagi O., Diffraction of steady stress waves by arbitrary shaped discontinuities in elastic medium. *Bull JSME*. 1980. Vol.23. No. 178. P.493-500.
6. Панасюк В.В., Саврук М.П., Назарчук З.Т. Метод сингулярних інтегральних рівнянь в двумерних задачах дифракції. К., 1984. 344 с.

7. Гузь А.Н., Немиш Ю.Н. Методы возмущений в пространственных задачах теории упругости. К.: Вища школа, 1982. 352с.

DIFFRACTION OF PLANE HARMONIC WAVES ON A RIGID CYLINDRICAL INCLUSION OF AN ARBITRARY CROSS SECTION

Panchenko B.E.¹, Gunchenko Yu.O.², Tymoshenko L.M.³,
Martynovych L.Ya.⁴, Severin M.V.⁵

^{1,5} State University of Intellectual Technologies and Communication
1, Kuznechna, Odesa, 65000, Ukraine

^{2,4} Odesa National University named after Mechnikov
2, Vsevolod Zmienko, Odesa, 65082, Ukraine

³ National Odesa Polytechnic University
1, Shevchenko Ave., Odesa, 65044, Ukraine

Emails: pr-bob@ukr.net¹, gunchenko@onu.edu.ua², l.m.timoshenko@op.edu.ua³,
larysa.yaroslavna@onu.edu.ua⁴, n_severin@ukr.net⁵

A mathematical model based on the method of singular integral equations was tested by high-precision numerical research. The boundary value problem of the diffraction of plane elastic standing waves on a rigid cylindrical inclusion of arbitrary cross-section located in an infinite isotropic medium was studied. The system of singular integral equations is solved by the computational method of mechanical quadrature. Additional conditions are used in integral form. To increase the accuracy of the results, the parallelization of the algorithm was applied. An analysis of the stress-strain state of the inclusion boundary is given. The parameters of the mechanical fields on the inhomogeneities of the rhombic shape were studied. For example, it was found that when comparing the results for different types of waves interacting with the inclusion, it can be concluded that there is a fundamental difference in the distribution of contour stresses when running into a rigid inclusion of an expansion-compression wave (P-case) or a shear wave (SV -case). In the P-case, the normal contour stress reaches local maxima at the frontal and shadow points, respectively. In the SV case, the normal stress at these points is zero and reaches a maximum around the slip point. The tangential stress in the P-case at the frontal and shadow points is zero, and its maximum is reached near the slip point. In the SV case, the normal stress takes a maximum value at the frontal point and has a local maximum near the slip point. When the relative inclusion density parameter increases, there is an increase in the normal stress in the P case and tangential stress in the SV case near the frontal point and their decrease around the shadow point. And the maximum of the tangential stress in the P-case and the normal stress in the SV-case shifts from the shadow area to the illuminated area. In addition, in the P-case, the normal stress prevails, and the value of the relative density parameter practically does not affect the value of this stress at the slip point.

Keywords: plane harmonic waves, diffraction, singular integral equations, numerical experiment, hard inclusion.