DOI 10.15276/imms.v9.no3.144
УДК 519.854.2

Informatics and Mathematical Methods in Simulation
Vol. 9 (2019), No. 3, pp. 144-157

РОЗРОБКА АЛГОРИТМІВ ПЛАНУВАННЯ РОБОТИ ПЕРСОНАЛУ З ГНУЧКИМ ГРАФІКОМ РОБОТИ

О.І. Гаврилюк, О.Г. Жданова, М.О. Сперкач

Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»,
просп. Перемоги, 37, Київ, 03056, Україна; e-mail: havrilyuk.olena@gmail.com, zhdanova.elena@hotmail.com, sperkachmaya@gmail.com

Процес оптимізації графіку роботи важливий для задоволення потреб у персоналі, виконання вимог щодо норм праці, врахування можливостей та побажань робітників. У роботі розглядаються задачі змінно-добового планування роботи персоналу з гнучким графіком. Сформульовано три задачі визначення кількості робітників, що виходять на зміну в кожен з інтервалів доби за умови, що тривалість зміни є сталою величиною. А також є обідня перерва в заданому проміжку посеред зміни, а штат робітників обмежений та досягає мінімуму сумарне відхилення кількості робітників від потреби в них у кожному інтервалі. Запропоновано два методи, які передбачають послідовне розв’язання двох оптимізаційних задач. В першому методі на першому етапі розв’язується задача, в якій необхідно визначити кількість робітників за умови, що обідні перерви відсутні, а в другому – за умови, що під обідні перерви виділено інтервал, в рамках якого дозволено призначати перерву. В обох методах, на основі розв’язку відповідної задачі першого етапу, необхідно розставити перерви таким чином, щоб досягти мінімального сумарного відхилення. В результаті формалізації були отримані задачі нелінійного програмування, які були зведені до задач цілочислового лінійного та булевого програмування. Для задачі з плаваючими обідами розроблено евристичні алгоритми вирішення, для яких проведено дві серії експериментів з метою дослідження їх ефективності. Вхідні дані для експериментів згенеровані випадковим чином у заданих межах проміжків часу. Варіювались такі параметри, як кількість інтервалів планування, на яку розбивається доба та межі плаваючих обідніх перерв. Результати роботи алгоритмів візуалізовано на графіках та свідчать про ефективність першого методу та необхідності додаткового дослідження другого.

Ключові слова: гнучкий графік роботи, календарне планування, евристичний алгоритм, лінійне програмування.

Вступ

Багато сучасних підприємств пропонують своїм робітникам гнучкий графік роботи, який надає переваги як робітникам, так і роботодавцям. До найбільш поширених переваг належать висока продуктивність праці, більша прибутковість організації та позитивний вплив на баланс між роботою та особистим життям [1].

Змінно-добове планування – це напрямок календарного планування, що є процесом прийняття рішень, який широко використовується у промисловому виробництві та сфері надання послуг. Задачі, що при цьому виникають зазвичай зводяться до дискретного програмування та теорії розкладів. Ці задачі вирішуються за допомогою точних або евристичних методів, які полягають у призначенні доступних ресурсів на виконання певних робіт, які необхідно виконати у задані проміжки часу. Призначення ресурсів має бути виконано таким чином, щоб досягти оптимального результату, що задовольняє один або більше критеріїв [2]. У багатьох торгівельних організаціях та організаціях з надання послуг потреба в робітниках залежить від потоку клієнтів, який змінюється протягом доби та залежить від багатьох факторів (день тижня, пора року, акції та знижки, святкові дні тощо). Далі без втрати узагальненості будемо розглядати змінно-добове планування графіків роботи робітників супермаркету, що працюють за гнучким графіком.

Мета і завдання дослідження

Мета дослідження – організація роботи штату супермаркету з метою мінімізації витрат на оплату робочого часу робітників за умови забезпечення роботи супермаркету. Зокрема формування такого графіку роботи робітників, за якого сумарне відхилення кількості робітників від потреби в них за задані проміжки часу впродовж доби (надалі «сумарне відхилення»).

Для досягнення мети необхідно виконати наступні *завдання*:

- побудувати формальні моделі;
- розробити алгоритми формування графіку виходів робітників з гнучким графіком роботи, за якого сумарне відхилення є мінімальним;
- програмно реалізувати розроблені алгоритми та систему для їх експериментального дослідження;
- виконати аналіз отриманих результатів.

Основна частина

Моделі планування трудових ресурсів є дуже важливим класом моделей в сфері надання послуг над вдосконаленням яких працюють вчені багатьох країн світу. У роботах [2, 3] розглянуто задачі змінно-добового планування роботи персоналу. Даний клас моделей можуть застосовуватися як для планування змін в сервісному центрі [4], плануванні розкладу роботи медичних сестер [5] так і для інших сфер надання послуг. Планування трудових ресурсів полягає у призначенні персоналу на зміну з метою задоволення попиту на ресурси, які можуть змінюватися з часом.

У дослідженні [6] використано метод багатокритеріальної оптимізації з метою надання кращого обслуговування шляхом збалансованого розподілу персоналу на зміну. У роботі [7] запропоновано ефективний евристичний підхід, що може бути використаний для вирішення задач теорії розкладів з цільовою функцією, що враховує як час завершення робіт, так і проміжний час завершення операцій. У [8] представлено евристичний табу пошук для задач планування, де критерієм є мінімізація суми окремих опуклих функцій витрат, закріплених за часом початку операції та різницею між часом початку довільних пар операцій. У дослідженні [9] запропоновано двокритеріальну модель булевого програмування та її розв’язок методом пошуку шляху для робочих станцій та заданим денним навантаженням, графіком роботи працівників, кількістю пристроїв на станції з метою мінімізації простоїв станції. У публікації [10] сформульовано задачу лінійного програмування, метою якої є виконання завдань з одночасною мінімізацією кількості непризначених завдань, відстані в дорозі, витрат працівників та максимального задоволення переваг клієнтів та робітників. У проєкті [11] використано багатокритеріальну оптимізацію та цілочислове лінійне програмування для планування графіку роботи робітників у бібліотеці. Критеріями є мінімізація надлишкових годин, відпрацьованих робітниками та максимізація відповідності їх побажанням з врахуванням необхідності задоволення потреб у персоналі в години пік.

Торгівельне підприємство є конкурентоспроможним за умови задоволення запитів клієнтів без великих часових затримок. При цьому потік клієнтів є неперервною змінною величиною, що змінюється протягом доби, та яку можна вважати сталою в межах інтервалів заданої тривалості, що слідують один за одним. Отже, доба розбита на

k інтервалів заданої тривалості, для кожного інтервалу відома мінімальна кількість робітників, здатних виконати встановлений обсяг робіт (надалі «потреба»). Інтервал – значення дискретної одиниці часу планування. Зміна може починатися тільки на початку одного з інтервалів. На рисунку 1 наведено приклад мінімально необхідної кількості робітників, якими можна задовольнити потреби функціонування супермаркету для кожного з одногодинних інтервалів доби.

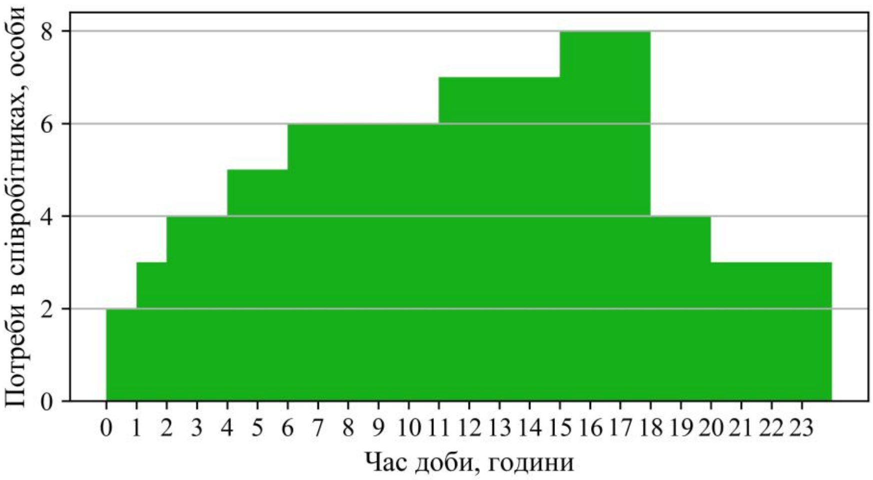


Рис. 1. Приклад залежності мінімальної кількості робітників від часу доби

Протягом зміни робітникам надається обідня перерва, яка має можливі варіанти розміщення або через задану кількість інтервалів після початку робочої зміни або в заданому проміжку інтервалів зміни, протягом якого є допустимим планування перерви. З урахуванням вищезазначеного сформулюємо три задачі.

Задача 1. Визначити кількість робітників у кожному з інтервалів доби, яка повинна бути не меншою мінімальної потреби в них. Врахувати, що тривалість зміни є сталою величиною та досягає мінімуму сумарне перевищення кількості робітників від потреби в них за задані проміжки часу впродовж доби (надалі «сумарне перевищення»).

Задача 2. Визначити кількість робітників у кожному з інтервалів доби за умови, що тривалість зміни є сталою величиною з обідньою перервою посеред зміни, а штат робітників обмежений та досягає мінімуму сумарне відхилення.

Задача 3. Визначити кількість робітників у кожному з інтервалів доби за умови, що тривалість зміни є сталою величиною з перервою, що запланована в заданому проміжку посеред зміни, а штат робітників обмежений. Мінімізувати сумарне відхилення.

У задачі 1 графік будується без врахування обідніх перерв. Оскільки рішення про час настання перерви приймає менеджер, який в реальному часі може оцінити потік клієнтів, таке послаблення обмежень може бути ефективним. У даній задачі не враховуються обмеження на кількість робітників. Отже, ця задача є найпростішою, і її результати можуть використовуватися як оціночні для більш складних моделей. Так, оскільки її розв'язок повністю забезпечує потреби у персоналі, то вона може бути використана для визначення мінімально необхідної кількості робітників та подальшого прийняття відповідних кадрових рішень.

Задача 2 враховує наявність перерв, які для всіх робітників починаються в один і той же час: через задану кількість інтервалів після початку зміни. У задачі 2 враховується обмеження на кількість робітників, а це означає, що можуть виникнути ситуації, коли не існує допустимих розв'язків за умови задоволення потреб. Саме тому в цій задачі метою є мінімізація відхилення від них.

Задача 3 відрізняється від попередньої тим, що перерви є плаваючими, тобто можуть бути заплановані через різні проміжки часу після початку робочої зміни.

Завдяки цьому, розв'язок задачі 3 може приймати менші значення критерія у порівнянні з відповідним розв'язком задачі 2.

Задача 1. Дано:

- g – кількість інтервалів часу;
- t – тривалість зміни в інтервалах;
- a_k – потреба у робітниках в k-й інтервал часу, $\mathrm{k} \in \{0,1,\ldots,g-1\}$;
- $e_k = k+1-t$ – зсув відносно початку відліку порядкового номера інтервалу, з якого починається підрахунок змін для k-го інтервалу часу, $\mathrm{k} \in \{0,1,\ldots,g-1\}$.

Нехай x_i – кількість робітників, що виходять на зміну в i-й інтервал часу, $i \in \{0,1,\ldots,g-1\}$. Введемо наступні позначення:

$$A_k = \begin{cases} \sum\limits_{i=e_k}^{k} x_i, \textit{для}\, e_k \ge 0 \\ 0, \textit{ для}\, e_k < 0 \end{cases},$$

$$B_k = \begin{cases} \sum\limits_{i=g+e_k}^{g-1} x_i, \textit{для}\, e_k < 0 \\ 0, \textit{ для}\, e_k \ge 0 \end{cases},$$

$$C_k = \begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{k} x_i, \textit{для}\, e_k < 0 \\ 0, \textit{ для}\, e_k \ge 0 \end{cases}.$$

Цільова функція (ЦФ):

$$\min z = \sum_{k=0}^{g-1} \left(A_k + B_k + C_k - a_k \right).$$

Обмеження на забезпечення потреби у робітниках в k-й інтервал часу:

$$B_k + C_k \ge a_k,\ e_k < 0, k \in \{0,1,\ldots,t-2\},$$
$$A_k \ge a_k, e_k \ge 0,\ k \in \{t-1,\ldots,g-1\},$$
$$x_i \ge 0,\ \text{цілі},\ i \in \{0, 1,\ \ldots,\ \mathrm{g}-1\}.$$

Задача 1 належить до класу задач цілочислового лінійного програмування (ЗЦЛП).

Задача 2. Дано $g, t, a_k, e_k, \mathrm{k} \in \{0,1,\ldots,g-1\}$ (див. Задача 1), а також:

- S – кількість робітників;
- $\underline{c}$ – номер інтервалу, з якого починається перерва;
- $\overline{c}$ – номер інтервалу, в який закінчується перерва;

Нехай x_i – кількість робітників, що виходять на зміну в i-й інтервал часу, $i \in \{0,1,\ldots,g-1\}$.

Введемо наступні додаткові позначення:

$$D_k = \begin{cases} \sum\limits_{i=e_k+\underline{c}}^{e_k+\overline{c}} x_i, для\, e_k \ge -\underline{c} \\ \sum\limits_{i=0}^{e_k+\overline{c}} x_i,\ для\, e_k < -\underline{c} \end{cases},$$

$$E_k = \begin{cases} \sum\limits_{i=g+e_k+\underline{c}}^{g+e_k+\overline{c}} x_i, для\, e_k \le g-1+\overline{c} \\ \sum\limits_{i=g+e_k+\underline{c}}^{g-1} x_i, для\, e_k > g-1+\overline{c} \end{cases}.$$

ЦФ:

$$\min z = \sum_{k=0}^{g-1} \left| A_k + B_k + C_k - D_k - E_k - a_k \right|. \tag{1}$$

Обмеження на загальну кількість робітників:

$$\sum_{i=0}^{g-1} x_i \le S, \qquad x_i \ge 0, \text{ цілі, } i \in \{0, 1, \ldots, \mathrm{g}-1\}. \tag{2}$$

Задача 2 може бути зведена до ЗЦЛП шляхом введення додаткових змінних та обмежень. Перетворимо задачу 2 таким чином, щоб позбутися від суми модулів у ЦФ (1). Замінимо вираз модуля під сумою на u_k, отримаємо:

$$\min z = \sum_{k=0}^{g-1} u_k.$$

Розкривши модуль, отримаємо дві групи обмежень, які накладаються на u_k. Перенесемо змінні в праву частину, а вільні коефіцієнти – в ліву:

$$A_k + B_k + C_k - D_k - E_k - u_k \le a_k,$$
$$A_k + B_k + C_k - D_k - E_k + u_k \ge a_k.$$

Отримана задача належить до класу ЗЦЛП.

Задача 3. Для визначення кількості робітників, що виходять на зміну в i-й інтервал часу, запропоновано два методи, які передбачають послідовне розв’язання двох оптимізаційних задач.

Метод І:

- задача І.3.1: задача визначення кількості робітників, в якій не враховується наявність перерв та мінімізується сумарне перевищення. У випадку, коли кількість робітників є такою, що забезпечення потреб є неможливим, слід розглянути аналогічну задачу з критерієм мінімізації сумарного відхилення.
- задача І.3.2: задача, в якій у знайденому в попередній задачі розв’язку необхідно розставити перерви таким чином, щоб досягти мінімального сумарного відхилення.

Метод II:

- задача II.3.1: задача визначення кількості робітників, в якій під перерви виділено інтервал, в рамках якого дозволено планувати перерву;
- задача II.3.2: задача, в якій у знайденому в попередній задачі розв'язку необхідно розставити перерви таким чином, щоб досягти мінімального сумарного відхилення.

Задача I.3.1. В загальному випадку це задача 1, окрім того, що наявне ще обмеження на кількість робітників (2). Якщо кількість робітників є такою, що їх силами неможливо задовольнити мінімальні потреби у кількості робітників, слід вирішувати задачу, в якій мінімізується сумарне відхилення. Дано g, t, a_k, e_k, $\mathrm{k} \in \{0,1,\ldots,g-1\}$ (див. Задача 1) та S (див. Задача 2). ЦФ:

$$\min z = \sum_{k=0}^{g-1} \left| A_k + B_k + C_k - a_k \right|.$$

Обмеження такі ж, як в задачі 2. Задача I.3.1 аналогічно до задачі 2 зводиться до класу ЗЦЛП, в результаті чого отримаємо наступну ЦФ та додаткові обмеження:

$$\min z = \sum_{k=0}^{g-1} u_k,$$

$$A_k + B_k + C_k - u_k \le a_k,$$

$$A_k + B_k + C_k + u_k \ge a_k.$$

Отримана задача належить до класу ЗЦЛП.

Задача I.3.2. Дано $g, a_k, \mathrm{k} \in \{0,1,\ldots,g-1\}$ (див. Задача 1), S (див. Задача 2) та:

- c – тривалість обіду в інтервалах;
- x_i – кількість робітників, що виходять на зміну в i-й інтервал часу, $i \in \{0,1,\ldots,g-1\}$ (розв'язок задачі I.3.1);
- s_j – номер інтервалу, в який j-й робітник виходить на зміну, $j \in \{0,1,\ldots,S-1\}$;
- $\underline{c}$ – мінімальний номер інтервалу, з якого може початися перерва;
- $\overline{c}$ – максимальний номер інтервалу, в який може закінчитися перерва.

Нехай y_{ji} – маркер присутності j-го робітника в i-й інтервал часу на робочому місці: 0 – відсутній, 1 – присутній, $j \in \{0,1,\ldots,S1\}, i \in \{0,1,\ldots,g1\}$. ЦФ:

$$\min z = \sum_{k=0}^{g-1} \left| \sum_{j=0}^{S-1} y_{jk} - a_k \right|. \tag{3}$$

Введемо наступне позначення для визначення тривалості перерви:

$$F_j = \begin{cases} \sum_{i=s_j+\underline{c}}^{g-1} y_{ji} + \sum_{i=0}^{\overline{c}} y_{ji}, & \text{якщо } \underline{c} - s_j < g < \overline{c} + s_j \\ \sum_{i=s_j+\underline{c}}^{s_j+\overline{c}} y_{ji}, & \text{в іншому випадку} \end{cases}.$$

Обмеження на тривалість обіду для j-го робітника:

$$\overline{c} - \underline{c} - F_j = \text{c},\ \text{j} \in \{0, 1, \ldots,\ S - 1\},$$

$$y_{ji} \in \{0,1\},\ i \in \{0, 1, \ldots,\ \text{g} - 1\}.$$

Обмеження на загальну кількість робітників завжди виконуватиметься, виходячи з обмежень задачі І.3.1, тому не є необхідним додавати його в задачу І.3.2.

Задача І.3.2 може бути зведена до задачі булевого програмування (ЗБП). Перетворимо її таким чином, щоб позбутися від суми модулів у ЦФ (3). Замінимо вираз модуля під сумою на u_k, отримаємо ЦФ:

$$\min z = \sum_{k=0}^{g-1} u_k.$$

Розкривши модуль, отримаємо дві групи обмежень, які накладаються на u_k. Перенесемо змінні в праву частину, а вільні коефіцієнти – в ліву:

$$\sum_{j=0}^{S-1} y_{jk} - u_k \le a_k,$$
$$\sum_{j=0}^{S-1} y_{jk} + u_k \ge a_k.$$

Отримана задача належить до класу ЗБП.

Задача ІІ.3.1. Це задача 2, в якій $\underline{c}$ та $\overline{c}$ (див. задачу І.3.2).

Задача ІІ.3.2. Задача аналогічна задачі І.3.2, де x_i – це розв'язок задачі ІІ.3.1, вона зводиться до ЗБП.

Використання точного алгоритму для вирішення задачі 3 є коректним лише для випадку, коли тривалість обідньої перерви рівна одному інтервалу. Оскільки неможливо вказати за допомогою обмежень ЗБП, що два або більше обідні інтервали мають йти послідовно один за одним, ця умова має забезпечуватися в ході виконання алгоритму. Ще одним з недоліків точного алгоритму є те, що він мінімізує лише сумарне відхилення від потреб. Це означає, що в окремо взятий інтервал часу відхилення можуть бути досить великими, що є не дуже добре для реальних умов. Отже, є необхідною розробка алгоритму, який би вирішив наведені вище недоліки.

Узагальнені схеми евристичних алгоритмів вирішення задачі 3

Метод 1.

Етап 1. Побудувати розв'язок задачі І.3.1 точним методом.

Етап 2. Доки є «непройдені» робітники, знайти максимальну суму непройденої комбінації з c «сусідніх» відхилень та знайти робітника, якому ще не призначено перерву та якому може бути його призначено для знайдених інтервалів. Якщо знайдено робітника, обнулити відповідні y_{ji} та позначити його «пройденим», а якщо не знайдено, то позначити «пройденою» знайдену комбінацію відхилень.

Деталізований алгоритм евристичного вирішення задачі І.3.2 наведено на рисунку 2а.

Метод 2.

Етап 1. Побудувати розв'язок задачі ІІ.3.1 точним методом.

Етап 2. Для інтервалів, у яких відхилення від потреби є від'ємне, доставити 1 у y_{ji}, обираючи щоразу найбільше відхилення, за умови, що у кожного робітника залишаться нульовим стільки інтервалів, скільки потрібно для обіду та які будуть йти послідовно один за одним.

Етап 3. Для кожного робітника проставити 1 в y_{ji} для інтервалів, що залишилися.

Деталізований алгоритм евристичного вирішення задачі ІІ.3.2 наведено на рисунку 2б.

Приклади застосування методів 1 та 2

Приклад розв'язання задачі І.3.1. Нехай мінімальні потреби для i-го інтервалу приймають значення, що наведені в табл. 1, робочий день триває 9 годин, а доба розбита на інтервали тривалістю 1 година $(g = 24,\ t = 9)$. Кількість робітників 14 $(S = 14)$. Знайдено оптимальний розв'язок з сумарним відхиленням 5.

Таблиця 1.

Вхідні дані прикладу задачі І.3.1 та І.3.2

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\boldsymbol{a_i}$	2	3	4	4	5	5	6	6	6	6	6	7
i	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
$\boldsymbol{a_i}$	7	7	7	8	8	8	4	4	3	3	3	3

Приклад розв'язання задачі І.3.2. Нехай номери інтервалів s_j, в які j-й робітник починає робочий день, приймають значення, що наведені в табл. 2, а $g = 24, t = 9$ – як в прикладі І.3.1. Обідні перерви тривалістю 1 година $(c = 1)$ мають починатися не раніше ніж після третьої години роботи та закінчуватися не пізніше ніж через 6 годин після початку робочого дня робітника ($\underline{c} = 3, \overline{c} = 5$) .

```
Вхід: g, S, c, c_, c¯,
        s = (s_0, s_1, ..., s_{S-1})
        a = (a_0, a_1, ..., a_{g-1})
        b = (b_0, b_1, ..., b_{g-1})
                 y_00      ...  y_0 g-1
        Y =      ⋮         ⋱    ⋮
                 y_S-1 0   ...  y_S-1 g-1
                 y_00      ...  y_0 g-1
Вихід: Y' =      ⋮         ⋱    ⋮
                 y_S-1 0   ...  y_S-1 g-1
q = diff(b)
w = (0, 1, ... S-1)
m = sum(Y)
while(length of w ≠ 0):
        i = index of max q
        f = false
        for each j in w:
                if y_ji ≠ 0 and check(s_j, c_, c¯, i, c, g)
                        for k_t from i to i+c:
                                k = k_t
                                if k_t ≥ g : k = k_t - g
                                y'_jk = 0
                                m_k -= 1
                                b_k = m_k - a_k
                                q_k = diff(b)
                        f = true
                        w.remove(j)
                        break
        if not f : q_i = null
calculate(a, b)
```

а

```
Вхід: S, c, c_, c¯
        s = (s_0, s_1, ..., s_{S-1})
                 y_00      ...  y_0 g-1
        Y =      ⋮         ⋱    ⋮
                 y_S-1 0   ...  y_S-1 g-1
        a = (a_0, a_1, ..., a_{g-1})
        b = (b_0, b_1, ..., b_{g-1})
                 y_00      ...  y_0 g-1
Вихід: Y' =      ⋮         ⋱    ⋮
                 y_S-1 0   ...  y_S-1 g-1
q = b
w = (0, 1, ... S-1)
m = sum(Y)
while(length of w ≠ 0):
        i = index of min q
        f = false
        for each j in w:
                if y'_ji == 0 and check(y'_j, s_j, c, c_, c¯, i, g)
                        y'_ji = 1
                        m_i += 1
                        q_i = b_i = m_i - a_i
                        f = true
                        break
                else:
                        if check_lunch(y'_ji):
                                w.remove(j)
        if not f : q_i = null
calculate(a, b)
```

б

Рис. 2. Деталізований алгоритм евристичного вирішення задачі: а - І.3.2 (етап 2 методу 1); б - ІІ.3.2 (етап 2 та 3 методу 2)

Таблиця 2.

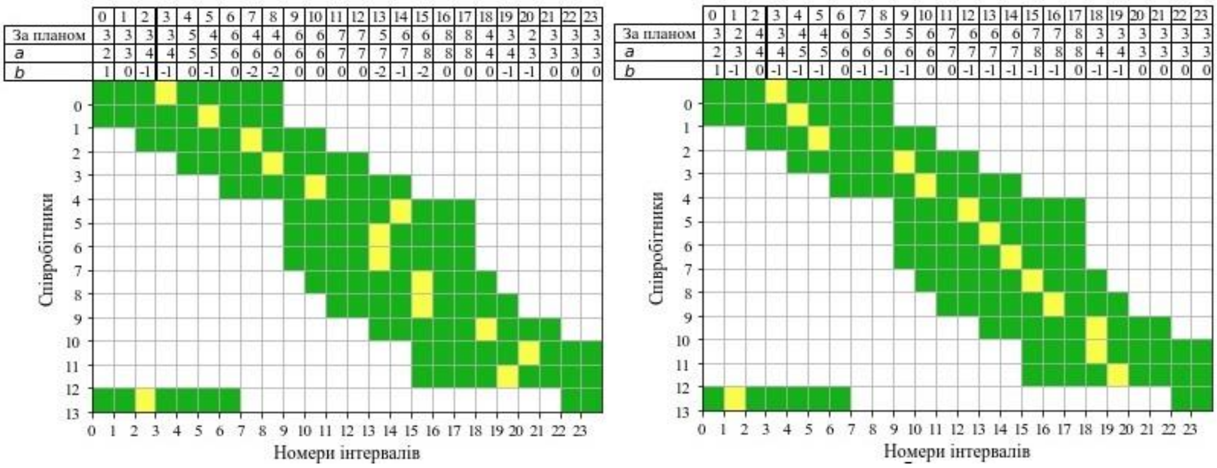
Вхідні дані прикладу задачі І.3.2

j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
s_j	0	0	2	4	6	9	9	9	10	11	13	15	15	22

Дана ЗБП може вирішуватись одним з відомих точних методів (метод Гоморі, гілок та меж тощо). В роботі запропоновано евристичний алгоритм її розв'язання. Точним алгоритмом було знайдено оптимальний розв'язок з сумарним відхиленням 15 (значення ЦФ), як і для евристичного алгоритму. На рисунку 3 наведено ілюстрації графіку роботи та значення знайденого розв'язку.

Приклад розв'язання задачі ІІ.3.1. Нехай x_i (табл. 1), g,t,S приймають значення як в прикладі І.3.1, а $\underline{c},\overline{c}$ – як в І.3.2. Точним алгоритмом знайдено розв'язок з сумарним відхиленням 41.

Приклад розв'язання задачі ІІ.3.2. Нехай номери інтервалів s_j, в які j-й робітник починає робочий день, приймають значення, що наведені в табл. 3, g,t – як в прикладі ІІ.3.1. Обідні перерви тривають 1 годину $(c=1)$.



а б

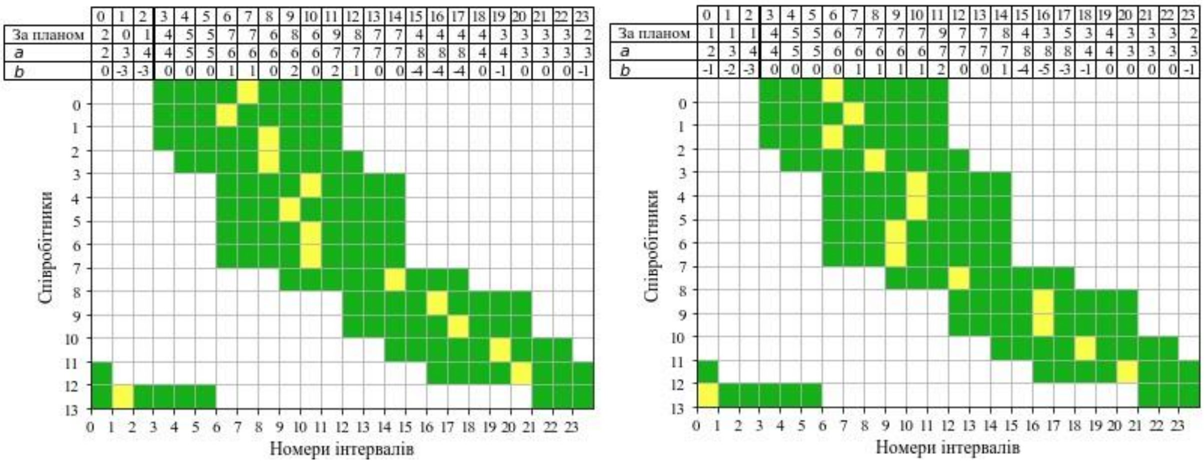
Рис. 3. Результат розв'язку прикладу задачі І.3.2: а – точним алгоритмом; б – евристичним алгоритмом

Таблиця 3.

Вхідні дані прикладу задачі ІІ.3.2

j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
s_j	3	3	3	4	6	6	6	6	9	12	12	14	16	21

Точним та евристичним алгоритмом було знайдено оптимальні розв'язки з сумарним відхиленням 27 (значення ЦФ). На рисунку 4 наведено ілюстрації графіку роботи та значення знайденого розв'язку.



а б

Рис. 4. Результат розв'язку прикладу задачі II.3.2: а – точним алгоритмом; б – евристичним алгоритмом

Аналіз проведених експериментів та плани щодо подальших досліджень

Для проведення експериментів випадковим чином було згенеровано набір вхідних даних з 50 індивідуальних задач. Значення величин мінімальних потреб для кожного діапазону інтервалів генерувалися у визначених межах. На рисунку 5 для кожного інтервалу показані межі величин $a_k,\ k \in \{0,1,\ldots,g-1\}$. Радіус круга пропорційний частоті зустрічальності відповідного згенерованого значення потреб.

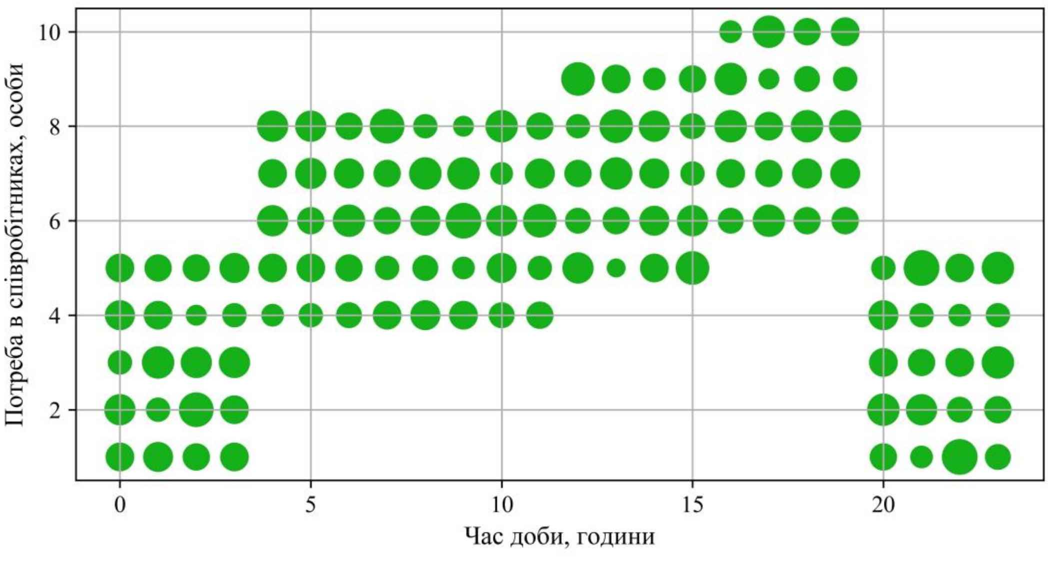


Рис. 5. Частота зустрічальності згенерованих значень

Перша серія експериментів порівнює розв'язки, отримані евристичними алгоритмами з розв'язками, що отримані точними алгоритмами. Експерименти проводились для множини індивідуальних задач з різними діапазонами, в яких допустимо планувати перерву при кількості робітників 13, тривалості інтервалу 1 година, кількості інтервалів 24, тривалості зміни 9, а обідньої перерви – 1. Для моделі 2 прийнято, що перерва фіксовано починається у четвертий по порядку інтервал зміни. Середні значення сумарних відхилень наведено у табл. 4. На рис. 6 наведено результати проведених серій експериментів.

Таблиця 4.

Середні сумарні відхилення від потреб, отримані в експериментах з різними діапазонами для планування перерви

Модель (тип алгоритму)	Діапазон для планування перерви		
	4-5	3-5	3-6
2 (точний)	30.62		
I.3.2 (точний)	33.64	32.32	31.64
I.3.2 (евристичний)	33.64	32.36	31.68
II.3.2 (точний)	40.12	45.2	48.76
II.3.2 (евристичний)	42.02	46.74	50.1

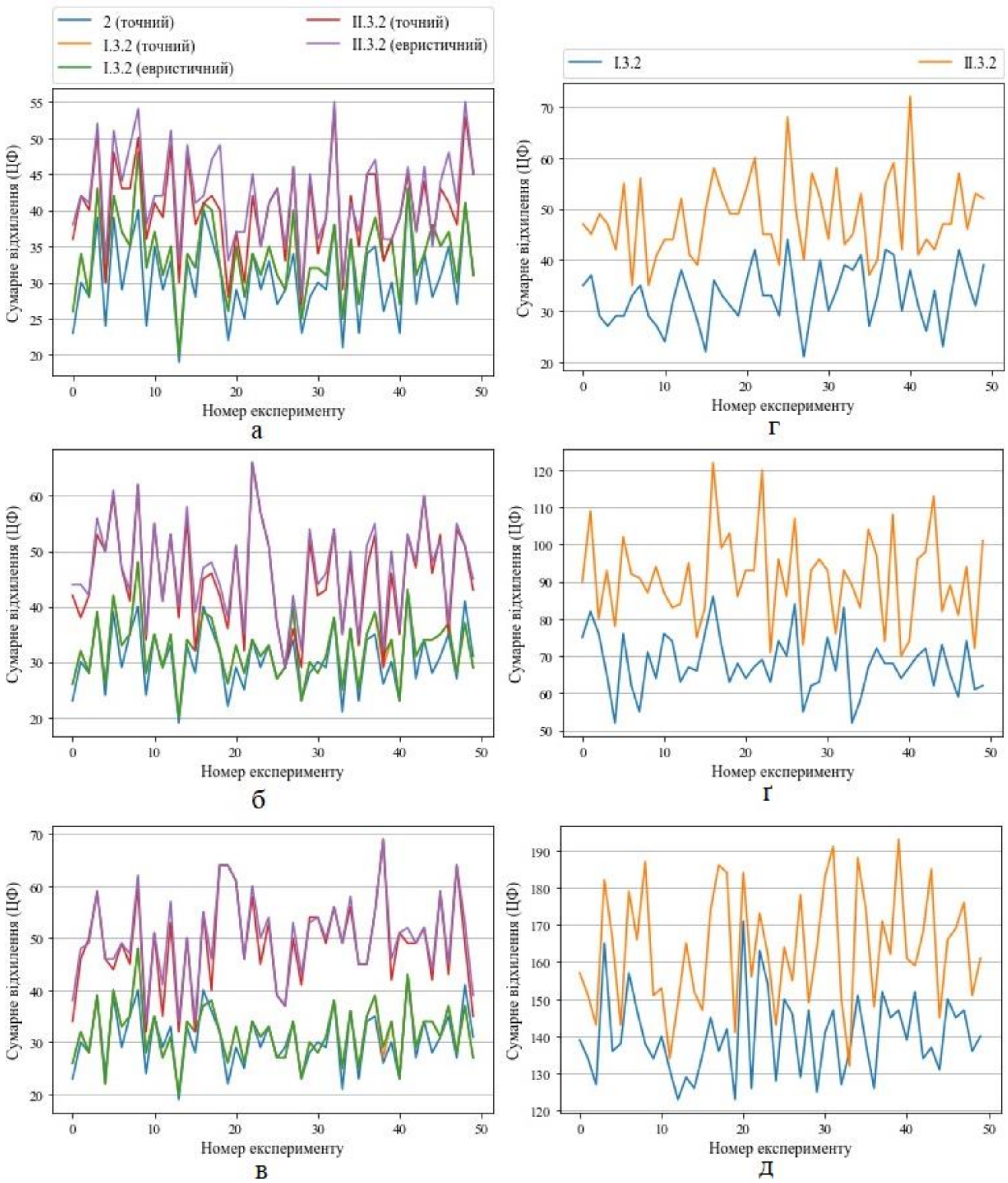


Рис. 6. Результати першої серії експериментів з різними діапазонами для планування перерви: а – з 4 по 5 інтервал; б – з 3 по 5; в – з 3 по 6; та другої серії експериментів з кількістю інтервалів: г – 24; ґ – 48; д – 96

Можна зробити висновок, що евристичний алгоритм методу I є доволі ефективним та дає результати близькі до оптимальних. Моделі з незафіксованими перервами мали б давати менше значення ЦФ, проте цього не відбулося. Для методу I це, в тому числі, пов'язано з тим, що у процесі розв'язання задачі I.3.1 іноді алгоритм будує графік не використовуючи весь потенціал штату робітників. Алгоритм можна покращити, визначивши в ньому на 2 етапі умови додавання робітників «з резерву». Для методу I чим більше є варіантність розміщення обіду, тим ЦФ є меншою.

Щодо методу II, додаткові експерименти показали, що для випадків, коли задано меншу кількість робітників та тривалість обіду наближається до тривалості діапазону, в якому його дозволено планувати, значення ЦФ наближається до її оптимального значення. Тож цей алгоритм слід використовувати з обережністю та лише за певних умов. Як варіант покращення можна розглянути всі альтернативні розв'язки та обрати серед них той, який найбільше підходить для заповнення перерв на основі даних про відхилення в кожен інтервал або визначити цільову функцію задачі II.3.1 як різницю кількості інтервалів до заповнення та суми від'ємних відхилень проміжків.

У другій серії експериментів варіювалися тривалості інтервалів та перерв зі значенням більше ніж один інтервал, при кількості робітників 13. У табл. 5 наведено значення середніх сумарних відхилень, що були отримані у другій серії експериментів.

Таблиця 5.

Середні сумарні відхилення від потреб, отримані в експериментах з різною кількістю інтервалів

Кількість інтервалів / тривалість перерви (тривалість зміни та діапазон планування перерви)	Модель (тип алгоритму)	
	I.3.2	II.3.2
24 / 2 (зміна 9 з перервою з 3 по 5)	45.6	47.66
48 / 4 (зміна 18 з перервою з 6 по 11)	91.74	94.36
96 / 8 (зміна 36 з перервою з 12 по 23)	183.5	184.76

Значення критеріїв практично співпадають, що свідчить про практичну доцільність використання обох розроблених евристичних алгоритмів. Перевагою запропонованих евристичних алгоритмів є те, що вони також мінімізують максимальне відхилення в кожен з інтервалів, тож хоч ЦФ і є гіршою, зате максимальне з відхилень є меншим порівняно з точним методом.

У подальших дослідженнях планується розглянути випадки, в яких розв'язок був незадовільним та модифікувати алгоритми таким чином, щоб покрити більшу кількість випадків. Також в планах є розглянути інші задачі планування графіків роботи робітників. Постановка цих задач відрізнятиметься від розглянутих задач додатковими обмеженнями, які хоч і ускладнять модель, але наблизять її до вирішення реальних задач. Наприклад: задача планування гнучких графіків, в якій необхідно цілком задовольнити потреби, задача планування гнучких графіків з робочими змінами різної тривалості або задача планування графіків роботи з врахуванням індивідуальних побажань робітників.

Висновки

У даній статті розглянуто задачі визначення кількості робітників, що виходять на зміну на початку кожного з інтервалів. Для задачі з плаваючими обідами запропоновано два методи вирішення, які передбачають послідовне розв'язання двох оптимізаційних задач. Побудовано формальні моделі та проведено процес позбавлення від модуля, в результаті якого нелінійні задачі звелися до ЗЦЛП та ЗБП. Проведено аналіз часткових випадків задач І.3.2 та ІІ.3.2 та обґрунтовано необхідність розробки евристичних алгоритмів для їх вирішення. Розроблено та реалізовано програмно евристичні алгоритми розв'язання, ефективність яких підтверджено результатами проведених експериментів. У планах подальших досліджень є розгляд можливостей покращення алгоритмів розв'язку розглянутих задач та дослідження пов'язаних з ними задач.

Список літератури

1. Shagvaliyeva, S. Impact of Flexible Working Hours on Work-Life Balance / S. Shagvaliyeva, R. Yazdanifard // American Journal of Industrial and Business Management. – 2014. – №4. – Pp. 20-23.
2. Pinedo, M. Planning and Scheduling in Manufacturing and Services / M. Pinedo. – New York: Springer Science+Business Media, 2009. – 536 p.
3. Taha, H. Operations Research: An Introduction / H. Taha. – New Jersey: Pearson Education, 2007. – 813 p.
4. Alfares, H. Operator staffing and scheduling for an IT-help call centre /H. Alfares European Journal of Industrial Engineering. – 2007. – Vol.1, №4. – Pp. 414-430.
5. Oluwaseun, M. A. Solving nurse problem using constraint programming technique. Computing Research Repository / M. A. Oluwaseun, O. A. Akeem. – Ogbomoso, Nigeria: Ladoke Akintola University of Technology, 2019. – 9 p.
6. Ozlem, K. Shift Scheduling with the Goal Programming Method: A Case Study in the Glass Industry / K. Ozlem, M. A. Haci, E. Tamer // Mathematics MDPI. – 2019. – Vol.7, №6. – 22 p.
7. Bülbül, K. A Linear Programming-Based Method for Job Shop Scheduling / K. Bülbül, P. Kaminsky // Journal of Scheduling. – 2013. – Vol.16, №2. – Pp. 161-183.
8. Bürgy, R. The Job Shop Scheduling Problem with Convex Costs / R. Bürgy, K. Bülbül // European Journal of Operational Research. – 2018. – Vol.268, №1. – Pp. 82-100.
9. Hug, F. A Heuristic Search Routine for Solving Two Objective Mixed Integer LP Problems for Scheduling in a Service Factory / F. Hug, M. Khurrum, S. Bhutta, Z. Huq // International Journal of Operational Research. – 2019. – Vol.36, №1. – Pp. 40-61.
10. Garaix, T. Workforce Scheduling Linear Programming Formulation / T. Garaix, M. Gondran, P. Lacomme, E. Mura, N. Tchernev // IFAC-PapersOnLine. – 2018. – Vol.51, №51. – Pp. 264-269.
11. Aayushi, G. Shift Scheduling Optimization for PSU Library / G. Aayushi, B. Anju, V. Lipishree, P. Shivani, D. Shravankumar // Engineering and Technology Management Student Projects. – 2018. – №2105. – 16 p.

РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМОВ ПЛАНИРОВАНИЯ РАБОТЫ ПЕРСОНАЛА С ГИБКИМ ГРАФИКОМ РАБОТЫ

Е.И. Гаврилюк, Е.Г. Жданова, М.О. Сперкач

Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского»
просп. Победы, 37, Киев, 03056, Украина; email: havrilyuk.olena@gmail.com, zhdanova.elena@hotmail.com, sperkachmaya@gmail.com

Процесс оптимизации графика работы важен для удовлетворения потребностей в персонале, выполнения требований к нормам труда и учета предпочтений работников. В работе рассматриваются задачи сменно-суточного планирования работы персонала с гибким графиком. Сформулировано три задачи определения количества работников, которые выходят на смену в каждом из интервалов дня при условии, что длительность смены является постоянной величиной. А также присутствует обеденный перерыв посреди смены в заданном промежутке, а штат работников ограничен и достигает минимума суммарное отклонение количества работников от потребности в них в каждом интервале. Предложено два метода, которые предусматривают последовательное решение двух оптимизационных задач. В первом методе на первом этапе решается задача, в которой необходимо определить количество работников при условии, что обеденные перерывы отсутствуют, а во втором – при условии, что для обеденных перерывов выделен интервал, в рамках которого разрешено назначать перерыв. В обоих методах на основании решения соответствующей задачи первого этапа, необходимо разместить перерывы таким образом, чтобы достичь минимального суммарного отклонения. В результате формализации получены задачи нелинейного программирования, которые были сведены к задачам целочисленного линейного и булева программирования. Для задачи с плавающими обедами разработаны эвристические алгоритмы решения, для которых проведено две серии экспериментов с целью исследования их эффективности. Входные данные для экспериментов сгенерированы случайным образом в заданных границах промежутков времени. Варьировались такие параметры, как количество интервалов планирования, на которые разбивается день и границы плавающих обеденных перерывов. Результаты работы алгоритмов визуализированы на графиках и свидетельствуют о том, что первый метод эффективен, а второй нуждается в дополнительном исследовании.

Ключевые слова: гибкий график работы, календарное планирование, эвристический алгоритм, линейное программирование.

DEVELOPMENT OF SCHEDULING ALGORITHMS FOR STAFF WITH FLEXIBLE WORK SCHEDULE

O.I. Havryliuk, O.G. Zhdanova, M.O. Sperkach

National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”
37, Peremohy Ave., Kyiv, 03056, Ukraine; email: havrilyuk.olena@gmail.com, zhdanova.elena@hotmail.com, sperkachmaya@gmail.com

The process of optimization work schedule is important for meeting the needs for staff and requirements of work time standards and also for accounting staff availability and preferences. The paper considers shifts scheduling problems for staff with a flexible work schedule. It was formulated three problems of determining the number of staff, who start to work in a given interval of the day. The problems deal with a given duration of the shift and lunchtime, which can be planned in the given bounds and the given staff number. The objective of the problems is to minimize the total deviation of staff count from needs for them in each time interval during the day. There have been proposed two methods for determining the staff number in each interval, which envisages the solve of the two optimization problems. The problem, in which it is needed to define the number of staff without the count of lunchtime is solving in the first stage of the first method and with the count of lunchtime in given intervals in the first stage of the second method. After the solution of the first stage problem, in both methods, it is needed to assign lunchtime in allowed bounds in the solution got in the previous problem to minimize the total deviation of staff numbers from needs for them. It was got nonlinear problems, which were transformed into the integer linear and binary integer programming problems. There have been developed heuristic algorithms for solving the problem with unfixed lunchtime. There were two series of experiments with the purpose of research their efficiency. The input dataset for experiments was generated randomly in given bounds of interval time. The number of intervals and bounds of flexible lunchtime are variated parameters. The results of experiments prove the efficiency of the first method and the needs of additional research on the second one.

Keywords: flexible shift scheduling, calendar planning, heuristic algorithm, linear programming.