DOI 10.15276/imms.v11.no4.374
УДК 510.67 (07)

Informatics and Mathematical Methods in Simulation
Vol. 11 (2021), No. 4, pp. 374-387

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ОСОБЛИВОСТЕЙ ФУНКЦІОНУВАННЯ КІБЕРЗАХИЩЕНИХ ІНФОРМАЦІЙНИХ СИСТЕМ В ЗАЛЕЖНОСТІ ВІД КІЛЬКОСТІ КОРИСТУВАЧІВ

В.О. Хорошко[1], В.А. Кудінов[2]

[1]Національний авіаційний університет,
пр. Любомира Гузера, 1, Київ, 03058, Україна; e-mail: professor_va@ukr.net
[2]Національна академія внутрішніх справ,
пл. Солом’янська, 1, Київ-ДСП, 03035, Україна; e-mail: kudinov_va@ukr.net

Сьогодні становлення інформаційного суспільства відбувається в умовах існування кіберзлочинів, тобто злочинів, пов’язаних з протиправним використанням кібернетичних комп’ютерних систем. Кримінальним правопорушенням у сфері використання електронно-обчислювальних машин (ЕОМ) (комп’ютерів), систем та комп’ютерних мереж і мереж електрозв’язку присвячений розділ XVI з шести статей Кримінального кодексу України. Зокрема, стаття 3631 містить склад злочину щодо перешкоджання роботі ЕОМ (комп’ютерів), автоматизованих систем, комп’ютерних мереж чи мереж електрозв’язку шляхом масового розповсюдження повідомлень електрозв’язку. Серед шляхів протидії кримінальному правопорушенню, передбаченого статтею 3631, є створення кіберзахищених інформаційних систем. Станом на теперішній час невирішеними залишаються питання щодо проведення відповідного математичного моделювання особливостей функціонування кіберзахищених інформаційних систем в залежності від кількості користувачів в розумінні статті 3631. Тому метою даної роботи було проведення зазначеного дослідження. Важливими результатами цієї роботи є отримання при заданих початкових умовах відповідних математичних виразів, що дозволяють в цілому описати поведінку інформаційної системи в залежності від кількості користувачів (запитів). Отримані результати математичного моделювання для певних параметрів системи узгоджуються з якісними уявленнями про поведінку системи та її насичення при збільшенні кількості користувачів. Практичне значення підсумків роботи полягає в тому, що її результати можуть бути використані при виборі параметрів кіберзахищених інформаційних систем, що проектуються.

Ключові слова: математичне моделювання, інформаційні системи, поведінка системи, кіберзахист, користувачі системи.

Вступ

Ми живемо в епоху інформаційного суспільства, коли комп’ютерні та телекомунікаційні технології охопили майже всі сфери життєдіяльності суспільства і держави. Але разом з тим становлення інформаційного суспільства відбувається не без проблем, найважливішою з яких сьогодні слід вважати кіберзлочинність, тобто сукупність кіберзлочинів [1]. Під кіберзлочинами розуміють злочини, пов’язані з протиправним використанням кібернетичних комп’ютерних систем [2, с. 111].

Законодавче визначення поняття кіберзлочину (комп’ютерного злочину) – «це суспільно небезпечне винне діяння у кіберпросторі та/або з його використанням, відповідальність за яке передбачена законом України про кримінальну відповідальність та/або яке визнано злочином міжнародними договорами України» [1]. Кримінальним правопорушенням у сфері використання електронно-обчислювальних машин (ЕОМ) (комп’ютерів), систем та комп’ютерних мереж і мереж електрозв’язку присвячений розділ XVI з шести статей Кримінального кодексу України [3]. Зокрема, стаття 363^1 містить склад злочину щодо перешкоджання роботі ЕОМ (комп’ютерів), автоматизованих систем, комп’ютерних мереж чи мереж електрозв’язку шляхом масового розповсюдження повідомлень електрозв’язку [4, с. 85].

Серед шляхів протидії кримінальному правопорушенню, передбаченого статтею 363[1], є підготовка відповідних кадрів правоохоронців щодо протидії кіберзлочинності [5] та створення кіберзахищених інформаційних систем [6, с. 151]. При цьому, під кіберзахистом розуміють сукупність організаційних, правових, інженерно-технічних заходів, а також заходів криптографічного та технічного захисту інформації, спрямованих на запобігання кіберінцидентам, виявлення та захист від кібератак, ліквідацію їх наслідків, відновлення сталості і надійності функціонування комунікаційних, технологічних систем [1].

Станом на теперішній час невирішеними залишаються питання щодо проведення математичного моделювання особливостей функціонування кіберзахищених інформаційних систем в залежності від кількості користувачів [7, с. 100, 101] в розумінні статті 363[1] Кримінального кодексу України.

Мета роботи

Метою даного дослідження є вивчення особливостей поведінки інформаційної системи в залежності від кількості користувачів шляхом проведення відповідного математичного моделювання, результати якого можуть бути використані при виборі параметрів кіберзахищених інформаційних систем, що проектуються.

Основна частина

Для проведення зазначеного математичного моделювання, перш за все, необхідно визначитись з основним понятійним апаратом щодо систем обробки інформації.

У роботі [8] проведено дослідження питань щодо правового регулювання таких основних понять, як «комп’ютерна система», «інформаційна система», «інформаційно-телекомунікаційна система», «автоматизована система» та взаємозв’язкам між ними. Особливостям визначення поняття «інформаційна система» присвячена стаття [9]. Станом на теперішній час розділ «Термінологія законодавства» веб-порталу Верховної Ради України містить посилання на 20 нормативних документів з визначенням терміну «інформаційна система». Найбільш розповсюджене визначення таке: «інформаційна система – це автоматизована система, комп’ютерна мережа, система зв’язку» [10].

Необхідно відмітити, що сучасний етап розвитку інформаційних систем характеризується тенденцією до створення паралельних багатопроцесорних обчислювальних систем, тобто подальше збільшення їх швидкодії здійснюється за рахунок паралельної обробки завдань. Тому при моделюванні складних багатопроцесорних систем для вирішення простих задач природно скористаємося моделлю багатоканальної системи масового обслуговування (СМО). При цьому процесори системи ототожнюються з каналами обслуговування, а задачі – із заявками.

Досвід експлуатації однорідних складних систем (ОСС), до складу яких входять багатопроцесорні обчислювальні системи [11], показав, що великі можливості цих систем можуть бути в повній мірі розкриті лише при застосуванні ефективних методів і засобів організації їх роботи. Задачі оптимізації цих систем по деякому вибраному критерію якості відносяться до екстремальних комбінаторних задач [12]. Їх постановка визначається метою функціонування ОСС, відповідно до якої вибирається критерій якості.

Для оцінки функціонування системи шляхом створення відповідної математичної моделі необхідно сформулювати її характерні особливості [13]:

1) велика кількість її складових частин – інформаційних підсистем;

2) багатомірність системи, що обумовлена наявністю великої кількості зв'язків між підсистемами;

3) складність виконуваних системою функцій, що спрямовані на досягнення мети її функціонування;

4) взаємодія із зовнішнім середовищем та функціонування в умовах впливу випадкових факторів;

5) наявність великої кількості критеріїв оцінки якості функціонування складної системи та її підсистем;

6) велика розмірність і складність моделі системи обумовлює необхідність застосування для її дослідження сучасних математичних методів декомпозиції, макро моделювання, імітаційного моделювання [13-15];

7) відсутність можливості отримання достовірної інформації про властивості системи в цілому в результаті вивчення властивостей її окремих підсистем.

Таким чином, складна система являє собою велику кількість взаємопов'язаних і взаємодіючих між собою підсистем різної фізичної природи, що разом складають нероздільне ціле і забезпечують виконання системою складної функції, яка описується досить складною математичною моделлю. Станом на теперішній час дослідження в цій сфері досить нечисленні.

Побудовано модель ОСС за наявності пріоритетного потоку великих задач. Завдання вважається великим, якщо його ранг більше $\frac{l}{2}$, де l – число машин у системі [16].

Передбачається, що на ОСС з l обчислювальних машин надходить Пуассонівський потік великих задач з параметром λ. Ймовірність надходження завдання з рангом k є b_k, $\sum_{k>\frac{l}{2}} b_k = 1$. Задачі обслуговуються в порядку надходження. Закон обслуговування є довільним і своїм для кожного рангу. Система знаходиться в стані i, якщо i задач знаходяться в черзі. Ймовірність $G_{ij}(x)$ переходу системи i в стан j за час x визначається наступним чином:

$$Q_{ij}(x) - \sum_{\nu>\frac{l}{2}} b_\nu \int_0^x [1 - e^{\lambda(x-y)}] e^{-\lambda y} \frac{(\lambda y)^j}{j!} dH_\nu(y),$$

$$Q_{ij}(x) = \sum_{\nu>\frac{l}{2}} b_\nu \int_0^x e^{-\lambda y} \frac{(\lambda y)^j}{j!} dH_\nu(y),$$

$$Q_{ij}(x) = \sum_{\nu>\frac{l}{2}} b_\nu \int_0^x [1 - e^{\lambda(x-y)}] e^{-\lambda y} \frac{(\lambda y)^{j-i+1}}{(j-i+1)!} dH_\nu(y).$$

Тут $H_\nu(y)(\nu > \frac{l}{2})$ – функція розподілу часу розв'язання задач ν-го рангу на системі.

За допомогою генератрис отримані умови, при яких період зайнятості системи має кінцеву тривалість. Під періодом зайнятості розуміється різниця між моментом часу t_k, коли система переходить із зайнятого стану у вільний, і найбільшим моментом часу, що не перевершує його t_k, переходу з вільного стану у зайнятий.

Крім того, знайдений розподіл ймовірностей π_j того, що в черзі знаходяться j завдач, які очікують рішення. Ця інформація дозволяє зміною числа обчислювальних машин регулювати довжину черги в необхідних межах.

Проведено дослідження [16] функціонування ОСС при обробці потоків складних завдань у припущенні, що в систему з N елементарних персональних ЕОМ (ЕМ) з додатковою нескінченною зовнішньою пам'яттю надходить Пуассонівський потік програм (ρ - програми) з інтенсивністю α. Ймовірність надходження ρ - програми рангу n є α_n ($\sum_{n=1}\alpha_n = 1, \alpha_n > 0, R$ - максимальний ранг програм, які надходять). Час обслуговування ρ - програм може бути описано експоненціальним законом з параметром β. Пропонується, що ОСС можуть одночасно існувати підсистеми всіх рангів від 1 до R, тобто $N \geq \frac{R(R+1)}{2}$. Виділимо в ОСС множину з $k \in E$ $(E = \{0,1,...,N\})$ і розіб'ємо його на підсистеми. Число підсистем рангу n, утворених у момент t зазначеним розбиттям, позначимо через $l_k(t), l_s(t)$ - число ρ - програм рангу n, що знаходяться в черзі довжиною s, у момент t. Введемо випадковий процес $\Omega(t) = \left\{ l_{k,n}(t), l'_{s,n} \frac{t}{k} \in E, n \neq \overline{1,k}, s = 0,\infty \right\}$. У силу зроблених припущень – він Марківський. Нехай $P_k^{l_1,...,l_k,l'_1,...,l'_k}(t)$ ймовірність того, що в момент $t_{k_1} \left| \sum_{n=1}^{R} n l_{k_1,n}(t) \right|$ ЕМ зайняте обслуговуванням ρ - програм і в черзі зайнято відповідне число місць в системі k_ν гілок. Крім того, потрібно обчислити: P_{kN} - імовірність того, що в ОСС знаходиться рівно k_ν гілок; $N_{cp} = \sum_{k=1}^{N} kP_k + N\sum_{k=1}^{\infty} P_{N+s}$ - середнє число зайнятих шин; $k_3(N) = \frac{N_{cp}}{N}$ - коефіцієнт ОСС, де

$P_k = \sum P_k^{l_1,...,l_k,l'_1,...,l'_k} = \sum \lim_{t\to\infty} P^{l_1,...,l_{R(t)},l'_1,...,l'_k}$ (підсумовування ведеться по всіх можливих ЕМ на підсистеми) у припущенні, що виконується умова нормування: $\sum_{k=0}^{\infty} k = 1$.

Нехай $N_{k,R}$ - число способів, якими можна розбити k ЕМ ρ - програмами, максимальний ранг яких дорівнює R. Тоді підсумувавши $N_{k,R}$ раз $P_k^{l_1,...,l_R}$, одержимо потрібне значення P_k.

Значення $N_{k,R}$ визначають за рекурентною формулою:

$$N_{k,R} = \sum_{j=1}^{R}\sum_{i=1}^{j} N_{k-j,i}.$$

При початкових умовах:

$$N_{k,1} = 1; N_{k,k} = 1; N_{k,j} = 0; k < j.$$

Ймовірність $P_k^{l_1,...,l_R,l'_1,...,l'_R}$ того, що в ОСС рівно k гілок при певному розгалуженні l_n, l'_n $(n = 1, R)$ знаходиться як розв'язок системи лінійних рівнянь, складений методом теорій масового обслуговування. Імовірність зайнятості k ЕМ ОСС у момент часу $t+\Delta t$ визначають як суму ймовірностей трьох несумісних подій:

1) у момент $t\, k$ ЕМ зайняті розбиванням l_n, за час Δt не прийшла ні одна ρ - програма і жодна підсистема не закінчила обслуговування;

2) у момент t зайнято $k-n$ ЕМ, але за час Δt надійшла програма рангу $n, n=\overline{1,R}$;

3) у момент t зайнято $k+n$ ЕМ, але за час Δt закінчилось обслуговування ρ - програми рангу $n, n=\overline{1,R}$.

Переходячи до межі при $\Delta t \to 0$, а потім при $t \to \infty$ отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь щодо ймовірності $P_k^{l_1,\dots,l_R,l_1^{'},\dots,l_R^{'}}$.

Вирішуючи цю систему рівнянь, визначаємо імовірності P_k підсумовуванням $P_k^{l_1,\dots,l_R,l_1^{'},\dots,l_R^{'}}$ по різноманітних комбінаціях $l_1,\dots,l_R,l_1^{'},\dots,l_R^{'}$.

За допомогою ймовірностей $R_k, k=\overline{0,\infty}$ визначається ймовірність відмови в обслуговуванні, ймовірність того, що всі ЕМ вільні, середнє число зайнятих машин та інші характеристики системи. На рис. 1 наведена залежність між середнім числом загальних процесів N_{cp} і загальним числом N машин.

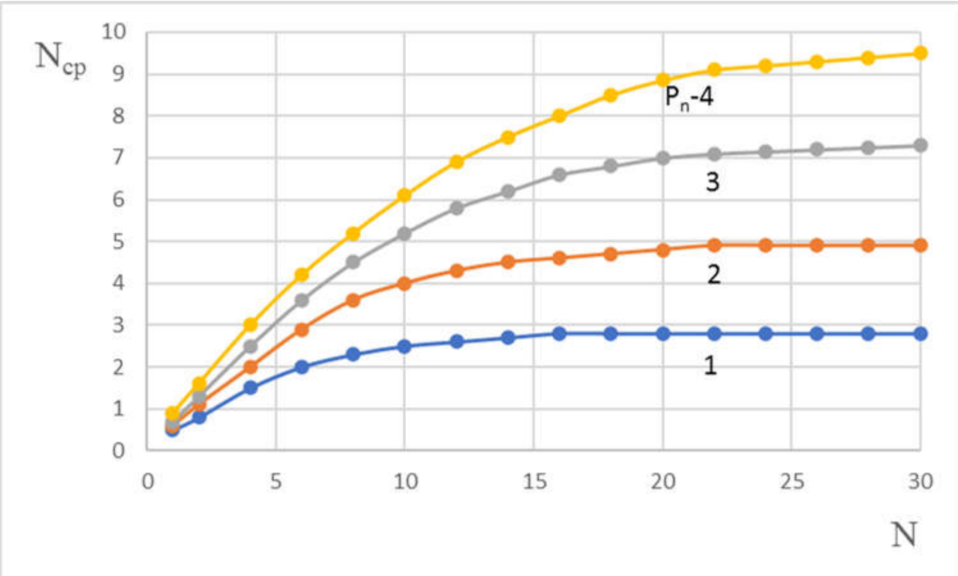

Рис. 1. Залежність середнього числа загальних процесів N_{cp} від загального числа N ЕОМ ОСС при обслуговуванні з чергою в різноманітних значеннях ($\alpha_n = 0,25; n=\overline{1,4}$).

Запропонуємо новий підхід [17] до дослідження функціонування складних систем. Передбачається, що система має різнотипні ресурси та заявки вимагають різних комбінацій цих ресурсів. Таким чином, пропонується досить детальна модель системи з званої багато ресурсної СМО. При цьому була вивчена тільки одна характеристика – потужність системи; описується метод визначення межі потужності за умови, що відомі характеристики вхідного потоку заявок.

Модель багато ресурсної СМО грунтується на наступних положеннях:

1) вузол обробки представляє собою ресурси різних типів; в системі може бути довільне, але фіксоване число елементів кожного типу; заявки, які надходять, вимагають одночасного використання деяких комбінацій системних ресурсів;

2) у будь-який момент часу робота належить одному з декількох класів і має фіксовані вимоги на ресурси. Безліч станів обробки визначається класом приналежності

роботи та фіксованими вимогами на ресурси. Для кожного стану обробки завдання визначається розподіл часу обслуговування для часу між переходами зі стану в стан. По завершенню обслуговування в певному стані обробки задачі наступний стан вибирається відповідно до матриці перехідних ймовірностей Марківського процесу;

3) заявки надходять на систему з одного або декількох необмежених джерел; визначена середня інтенсивність надходження робіт з різними початковими станами обробки;

4) можливі три форми розподілу ресурсів (без розподілу або мультиплексування ресурсів, розподіл ресурсів, мультиплексування). Спосіб розподілу ресурсів впливає як на швидкість проходження робіт, так і на ступінь паралельності обробки завдань системи.

Введено позначення: I - число типів ресурсів; R_i - кількість ресурсів i-го типу в системі $i=\overline{1,I}$; I - число класів заявок; K - кількість різних векторів вимог на ресурси, допустимих в системі.

$\overline{V_k}=\begin{bmatrix} V_{1,k} \\ ... \\ V_{1,R} \end{bmatrix}$ - вектор вимог роботи на ресурси, де $V_{i,k}$ - число необхідних ресурсів i-го типу $i=\overline{1,I}, k=\overline{1,K}$.

Стан обробки завдання визначається парою (j,k), що означає: робота належить класу j і вимагає безліч ресурсів, що дається $\overline{V_k}$. Для зручності позначень проводиться ізольоване відображення множини пар $\{(j,k)\}$ на множину $\{l\}$ простих індексів; $L=I\times K$ число станів обробки завдань; S_l - стан l обробки завдань $1\le l\le L$.

$\overline{W_l}=\begin{bmatrix} W_{1,l} \\ W_{2,l} \\ ... \\ W_{I,l} \end{bmatrix}$ - вектор вимог на ресурси роботи в стані S_l, $W_{i,l}$ - кількість ресурсів i-го типу необхідного для задачі в стані S_l.

Для всього завершення роботи необхідне проходження через послідовність станів. Завершення роботи еквівалентно переходу в заключний стан “0”, що позначається через S_0. Час обслуговування, необхідного роботою, яке перейшло в стані S_l - це час, протягом якого робота використовує ресурси W_l до переходу в черговий стан. Нехай T_l середній час обслуговування, необхідну завданням у стані $S_l, l=\overline{1,L}$.

Для вирішення цього завдання запишемо *твердження 1*. Опинившись в стані S_l робота залишається в ньому до закінчення часу обслуговування.

Твердження 2. Наступний стан визначається дискретним Марківським процесом, який описується матрицею $\overline{P}; \overline{P}=(L+1)\times(L+1)$ стохастична матриця перехідних ймовірностей. Заявки на роботу надходять на систему з одного або декількох необмежених джерел, причому інтенсивність надходження завдач з початковим станом S_l дорівнює λ_l, загальна інтенсивність $\lambda=\sum_{l=1}^{L}\lambda_l$. Знаючи λ можна визначити ймовірність знаходження роботи в початковому стані $S_l: f_l=\frac{\lambda_l}{\lambda}$. Розподіл початкових станів робіт дається вектором $\overline{F}-[f_1,f_2,...,f_L]$. Використовуючи вектор $\overline{F}$

і матрицю $\overline{P}$, можна визначити $\overline{G}-[g_1, g_2, ..., g_L]$, де g_l - середнє число перебувань роботи в стані S_l.

У багато ресурсних СМО передбачається існування постійних розподілів часу обслуговування та інтенсивного надходження для кожного класу заявок. Визначається $\pi_0(\lambda)$ - імовірність того, що система вільна, $\pi_m(\lambda)$ - імовірність того, що обслуговується комбінація $m, m = \overline{1, M}$.

Твердження 3. Якщо параметри $g_l, l = \overline{1, L}$ постійні та розподіл часу обслуговування також постійний, то загальна інтенсивність вхідного потоку не змінюється.

На підставі твердження 3 можна сказати, що описувана система має фіксовані характеристики потоку робіт. Для даного алгоритму розподіл завдань і фіксованих характеристик потоку робіт знаходиться потужність системи, яка визначається як інтенсивність вхідного потоку λ_{bx}:

$$\lim \pi_0(x) = 0,$$
$$\lambda \uparrow \lambda_{bx},$$

де $\lambda \uparrow \lambda_{bx}$ означає "λ прямує до λ_{bx} знизу".

Межа потужності λ_{max} для багато ресурсної СМО визначається як інфімум інтенсивностей вхідних потоків, при яких гарантується насичення, незалежно від використовуваного алгоритму розподілу заявок.

Для визначення межі потужності багато ресурсної СМО пропонується наступний метод.

Припустимо, що g_l (середнє число перебувань роботи в стані S_l) і T_l (середній час обслуговування роботи в стані S_l) обмежені і додатні для кожного стану обробки завдань S_l константи. Межа потужності λ_{max} є вирішенням наступного завдання лінійного програмування:

$$\lambda_{max} = \max_{\pi(\lambda)} \sum_{m=1}^{M} c_m \pi_m(\lambda),$$

причому

$$\sum_{m=1}^{M} \pi_m(\lambda) = 1,$$

де $\pi_m(\lambda) \geq 0, 1 \leq m \leq M$ і

$$\sum_{m=1}^{M} A_{l,m}(\lambda) = 0$$

для $1 \leq l \leq L-1$, де

$$c_m = \left\{\sum\nolimits_{l=1}^{L} e_{m,l} k_{l,m}\right\} \Big/ \left\{\sum\nolimits_{l=1}^{L} g_l T_l\right\}, m = \overline{1, M};$$
$$A_{l,m} = e_{m,l} k_{l,m} \big/ (g_l T_l) - e_{m,l+1} k_{l+1,m} \big/ (g_{l+1} T_{l+1}),$$

$m = \overline{1, M}$, $l = \overline{1, L-1}$, де $k_{l,m}$ - число робіт з комбінації m в стані S_l; $e_{m,l}$ - середня швидкість обробки завдання з комбінації m в стані S_l.

Ця методика дозволяє визначити межі потужності для системи з фіксованими характеристиками вхідного потоку. Так як завдання лінійного програмування містить L обмежень, то не більше L змінних $[\pi_m(\lambda)]$ повинні не дорівнюватиме нулю. Значення $\pi_m(\lambda)$ визначає долю часу, протягом якого система повинна обробляти комбінацію m, щоб досягти межі M потужності. Єдиність рішення не гарантується. Якщо є кілька екстремальних точок, то будь-яка опукла їх комбінація також буде екстремальною.

Знаючи набір $\{\pi_m(\lambda)\}$, на якому досягається екстремум, можна визначити "небажані" для призначення комбінації (ті, для яких $\pi_m(\lambda) = 0$) і "бажані" ($\pi_m(\lambda) \neq 0$). Якщо прямує до розтягування повної потужності, то слід віддавати перевагу "бажаним" комбінаціям.

Слід зауважити, що техніка визначення межі потужності "бажаних" і "небажаних" комбінацій, інформацію про які корисно використовувати при розподілі заявок, на практиці може застосовуватися тільки при дослідженні малих систем, для яких кількість можливих комбінацій досить невелика.

Якщо розглядається ОСС, яка обробляє скінченну множину завдач, то визначається необхідна кількість $c_{\min}$ джерел запиту, які забезпечують ефективне використання робочого поля обчислювальної системи, орієнтованої на паралельне обчислення [18]. Робоче поле складається з множини однакових елементів – зон і при цьому вся система містить S зон. Для визначення $c_{\min}(\delta)$ пропонується наступна модель.

Нехай величини запитів l_i від i-го джерела має однаковий розподіл, тобто $l_i = k$ з ймовірністю P_k для всіх цілочисельних значень k і $i = 1, \xi$.

На кожному такті ресурси розподіляються таким чином: у випадковому порядку нумеруються джерела запитів і ресурси виділяються послідовно у відповідності з нумерацією на даному такті. Процес розподілу ресурсів закінчується, коли всі запити задоволені або як тільки черговому джерелу запитів не вистачило ресурсів. У цьому випадку наступні джерела запитів не розглядаються, хоча серед них можуть бути такі, від яких число запитів не перевершує невикористаних процесорних зон, які залишилися.

Ціллю цієї дисципліни обслуговування може служити дискретні випадкові блукання частинки по відрізку цілочисленної довжини $[0, \delta]$. При цьому початковому положенні частинка перебуває на лівій межі відрізка; при виділенні необхідного ресурсу $l_i = k$ чергового джерела запитів частинка запитів переміщається на k одиниць у напрямку правої межі відрізка. Число повних стрибків частки на відрізку $[0, \delta]$ відповідає числу джерел запитів, які отримали на даному такті роботи системи необхідний ресурс.

Математичне сподівання l_z, де $\delta = a - z$, $0 \le z \le \delta < a$, числа обслужених на одному такті джерел запитів за описаної дисципліни розподілу ресурсів виходить таким чином. Нехай $d_{z,n}$ - ймовірність того, що при початковому положенні частинки $(0 < z < a)$ блукання частинки завершується рівно за n кроків. Тоді $d_{z,n+1} = \sum_{x=1}^{a-1} d_{x,n} P_{x-z}$.

Позначимо $d_z(S)=\sum_{n=0}^{\infty} d_{z,n}S^n$. Множачи попередні рівності на S^{n+1}, підсумовуючи по $n=0,1,2,...,\infty$, диференціюючи отримане співвідношення з урахуванням $d_z(1)=e_z$, отримаємо при $S=1, e_z-\sum_{x=1}^{a-1} P_{x-z}e_z=1, x=1,2,...,a-1.$

Вирішення цієї системи дозволяє встановлювати мінімально необхідну кількість джерел запитів

$$c_{\min}=[e_z],\ z=1,2,...,a-1,$$

при заданому числі процесорних зон робочого поля $\delta=a-z$ (у квадратних дужках зазначена ціла частина числа). Коли перерозподіл ресурсів проводиться тактовно, описана модель може застосовуватися для вибору мультипрограмування як для мультипроцесорних (розподіл процесорів між завданнями), так і для мультипрограмних однопроцесорних обчислювальних систем (розподіл оперативної пам'яті між завданнями).

Для підрахунку кількості варіантів розміщень задач в обчислювальній системі в межах даної структури чи множини структур пропонується наступна методика [16].

Загальне число F_n структур системи порядку n визначається як число розбиття (без обмежень) P_n числа n. Під структурою розуміється сукупність $A=\left\{\lambda_i^{\alpha_i}\right\}$ обчислювальних компонентів (ОК), де λ_i - ранг ОК; α_i - число ОК рангу λ_i; при цьому $\sum\lambda_i\alpha_i$ - порядок обчислювальної системи; $\sum\alpha_i=S$ - розмірність системи (число ОК в системі). Наведено такі формули (при $n<14$):

а) число варіантів розміщень завдань у ЗС порядку n, що складається з S ОК рангів $\lambda_i<k; S_1=\delta^{(k)}(n,S)$, де $\delta^{(k)}(n,S)$ - число Стірлінга другого роду [19];

б) число варіантів розміщення завдань у ЗС порядку n, що складається з S ОК рангів $\lambda_i\le k$:

$$S_2=\sum_{z=0}^{n}(n)\sum_{j=0}^{S}(-1)^j\delta^{(1)}(n-r,s-j)\delta^{(k+1)}(r,j);$$

в) число варіантів розміщення завдань у ЗС порядку n, що складається з S ОК рангів λ_i:

$$S_3=\begin{cases} 2^{-S}\sum_{i=1}^{S}(-1)^{S-1}\left\{i!(S-i)!\right\}(2i-S)^n,\ {}^{2}\!/\!{}_{\lambda_i} \\ \sum_{j=0}^{S}(-1)^{S-j}\left\{(S-j)!\,j!\right\}2^{-j}\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}(2i-j)^n,\ {}^{2}\!/\!{}_{\lambda_i} \end{cases};$$

г) число варіантів розміщення завдань у ЗС порядку n, що складається з ОК рангів $\lambda_i, k\le\lambda_i\le l$:

$$S_4=\sum_{j=0}^{S}\sum_{r=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{r}\delta^{(k)}(n-r,s-1)\delta^{(i+1)}(r,j).$$

Очевидно, підрахунок числа варіантів розміщення завдань для систем великого порядку представляє значну обчислювальну складність, що дещо знижує практичну цінність описаної методики.

В [20] пропонується наступна методика визначення ймовірнісних характеристик ОСС в режимі пам'ятної обробки складних завдань при різних дисциплінах розподілу.

Спочатку розглянемо випадок потактового розподілу. Припустимо, що система складається з M ідентичних процесорів; число завдань, що вимагають рішення при кожному розподілі, дорівнює $k; i-s, i=\overline{T,k}$ завдача однаково ймовірно вимагає для свого рішення N_i процесів з множини $\{0,1,...,N\}$; кожна завдача одночасно займає всі надані їй процесори, які після закінчення рішення одночасно всі звільняються; час вирішення кожного завдання не перевершує T.

Імовірність $P_k(M,N)$ вирішення всіх k завдань за один такт визначається як відношення числа δ всіх сприятливих варіантів

$$\sum_{i=1}^{k} n_i \le M,\ 0 < n_i < N,\ i=\overline{1,k}$$

до числа W всіх можливих варіантів $0 \le n_i \le N, i=\overline{1,k}$.

Таким чином,

$$P_k(M,N) = \frac{B}{W} = \frac{\sum_{n_1=0}^{M} \sum_{n_2=0}^{M-n_1} ... \sum_{n_k=0}^{M-n_1...n_{k-1}} \prod_{i=1}^{k} n_i}{(N+1)^k},$$

де $n_i = \{1, 0 \le n_i \le N;\ \ 0, n_i > N\}$.

Наведене рівняння не дозволяє практично знайти ймовірність $P_k(M,N)$ при досить великих значеннях параметрів M,N і k. Тому була отримана формула, яка дає приблизне значення $P_k(M,N)$:

$$P_k(M,N) = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{[\frac{M}{N}]} (-1)^j c_k^j (\frac{M}{N} - j)^k + 0(\frac{2}{N}),$$

де $[\frac{M}{N}]$ – ціла частина числа.

Вона придатна для практичних обчислень і справедлива при $M \ge k$ і $N \ge k$. Саме такі співвідношення параметрів характерні для проектованих нині ОСС, які повинні містити сотні і тисячі міні-процесорів і обслуговувати десятки користувачів.

Використовуючи $P_k(M,N)$ можна визначити розподіл ймовірностей числа вирішених за один такт задач:

$$P_{k,s}(M,N) = P_s(M,N)\prod_{i=1}^{k-s}[1 - P_{s+i}(M,N)],\ S \le k;$$

математичне сподівання кількості вирішених за один такт завдач:

$$\overline{k}(k,M,N) = \sum_{s=1}^{k} SP_{k,s}(M,N),$$

та інші ймовірнісні характеристики ОСС. На рис. 2-4 наведено графіки залежностей $P_k(M,N), \overline{k}(k,M,N)_n, \overline{k}(k,M,N)/k$ при різних значеннях параметрів M,N і = k.

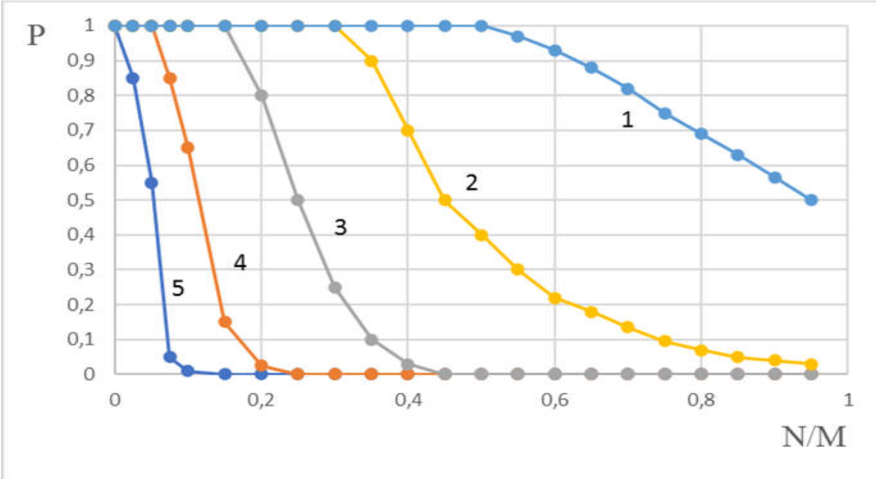

Рис. 2. Графік залежності $P_k(M,N)$ від відношення N/M при k, що дорівнює 2 (крива 1), 4 (крива 2), 8 (крива 3), 16 (крива 4) і 32 (крива 5).

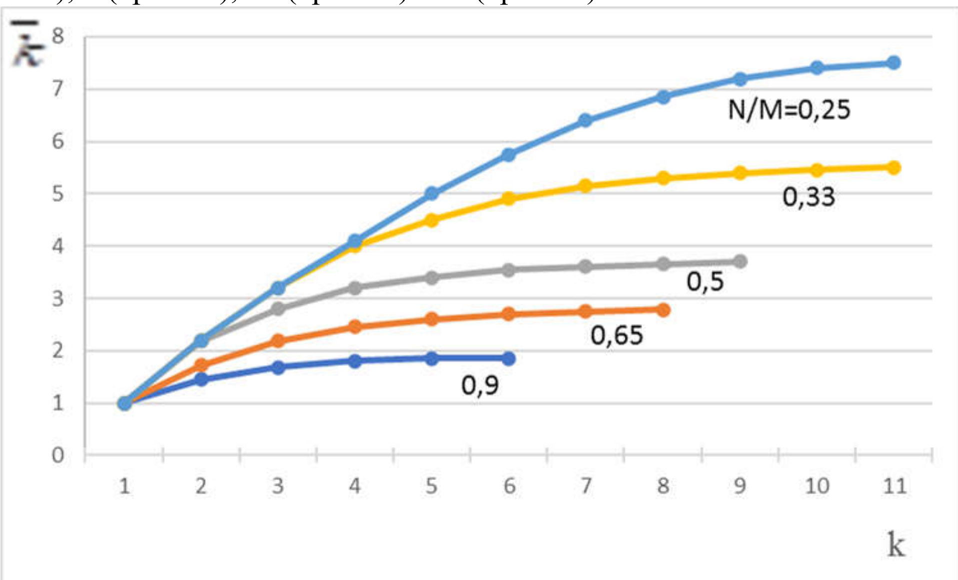

Рис. 3. Залежність математичного сподівання числа обслужених заявок $\overline{k}$ від загального числа користувачів k при різноманітних значеннях відношення N/M

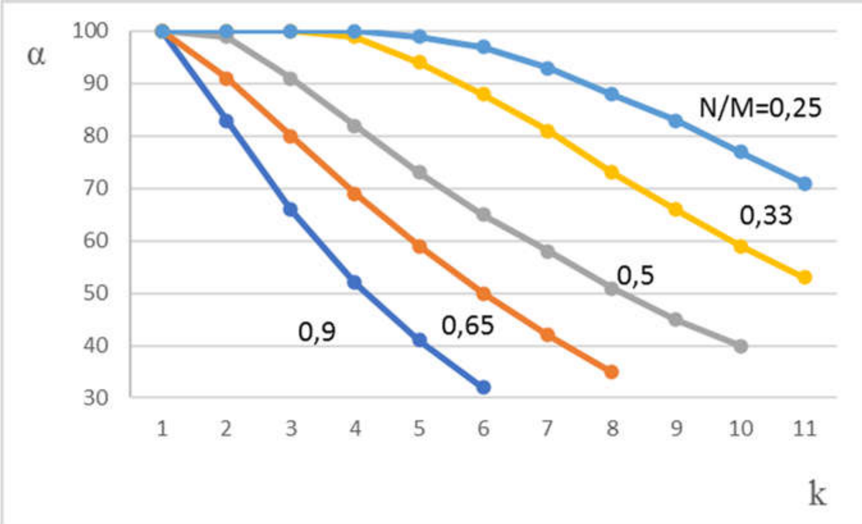

Рис. 4. Залежність відношення $\alpha = \frac{\bar{k}}{k}$ від загального числа користувачів k при різноманітних значеннях відношення N/M

Висновки

Вивчено особливості поведінки інформаційної системи в залежності від кількості користувачів шляхом проведення математичного моделювання. Отримані результати досліджень узгоджуються з якісними уявленнями про поведінку системи та її насичення при збільшенні кількості користувачів. Результати можуть бути використані при виборі параметрів кіберзахищених інформаційних систем, що проектуються.

Список літератури

1. Про основні засади забезпечення кібербезпеки України: Закон України від 05 жовт. 2017 р. № 2163-VIII. *Відомості Верховної Ради України*. 2017. № 45. Ст. 403. URL: https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/2163-19/conv#Text.
2. Бутузов В. М. Протидія комп’ютерній злочинності в Україні (системно-структурний аналіз): монографія. Київ, 2010. 408 с.
3. Кримінальний кодекс України: Закон України від 05 квіт. 2001р. № 2341-III. *Відомості Верховної Ради України.* 2001. № 25-26. Ст. 131. URL: https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/2341-14#Text.
4. Термінологічний довідник з питань технічного захисту інформації / В.О. Хорошко, І.М. Огаркова, Д.В. Чирков та ін. / за заг. ред. проф. В.О. Хорошка. Київ, 2003. 286 с.
5. Кудінов В. А. Вирішення проблем відбору та підготовки кадрів правоохоронців щодо протидії кіберзлочинності. *Кадровий вісник. № 1*. 2011. С. 51–68.
6. Термінологічний довідник з технічного захисту інформації на об’єктах інформаційної діяльності / С.Р. Коженевський, Г.В. Кузнецов, В.О. Хорошко та ін. / за заг. ред. проф. В.О. Хорошка. Київ, 2007. 365 с.
7. Словник термінів з кібербезпеки / В.М. Бутузов, В.Д. Гавловський, О.Д. Довгань та ін. / за заг. ред. О.В. Копана, Є.Д. Скулиша. Київ, 2012. 214 с.
8. Корнейко О. В., Кудінов В. А. Правове регулювання основних термінів щодо систем обробки інформації у сфері забезпечення кібербезпеки в Україні.

Кібербезпека в Україні: правові та організаційні питання. *Матеріали III Всеукр. наук.-практ. конф. Одеса: Одеський держ. ун-т внутр. справ*, 2018. С. 24–26.
9. Юдкова К. В. Особливості визначення поняття «інформаційна система». *Інформація і право*. 2015. № 2 (14). С. 39–44.
10. Термінологія законодавства. Верховна Рада України. URL: https://zakon.rada.gov.ua/laws/term/11471.
11. Swan R. J., Fuller S. H., Siewiorek D. P. Cm. A modular, multi-microprocessor. AFIPS Couf. *Proc.* 1997. V. 46. P. 637–644.
12. Бурков В. Н., Ловецкий С. Е. Методы решения экстремальных комбинаторных задач. *Изв. АН СССР: сер. техн. кибернетика.* 1988. С. 82–93.
13. Михалевич В. С., Волкович В. Л. Вычислительные методы исследованя и проектирования сложных систем. М.: Наука, 1982. 286 с.
14. Моисеев Н.Н. Математические задачи системного анализа. М.: Наука, 1981. 487с.
15. Regis R. C. Multiserver Queueing Models of Multiprocessor Systems. *IEEE Trans.* 1993. V.C-22, № 8. P. 736–744.
16. Михайлов В. А., Хорошко В. А. Принципы построения многопроцессорных вычислительных систем, расчет их производительности. *Зб. наук. праць Севастопольського військово-морського інституту ім. П.С. Нахімова.* 2006. Вип. 1 (9). С. 102–106.
17. Kenneth J. O. Capacity Bounds for Multirescurse Quenes. *Journal of ACM.* 1977. V. 24, P. 648–663.
18. Егоров Ф. И., Орленко В. С., Хорошко В. А. Проектирование сложных информационных сетей. *Вісник ДУІКТ.* 2007. Т. 5. № 4. С. 39–51.
19. Оре О. Теория графов. М., 1980. 338с.
20. Макаревич О. Б., Саак Э. М., Чефранов А. Г. Анализ загруженности однородных микропроцессорных вычислительных систем коллективного пользования. *Автоматика и вычислительная техника.* 1990. № 4. С. 32–36.

MATHEMATICAL MODELING OF THE OPERATION OF CYBER-PROTECTED INFORMATION SYSTEMS DEPENDING ON THE NUMBER OF USERS

V.O. Horoshko[1], V.A. Kudinov[2]

[1]National Aviation University, Lubomyr Huzer Ave, 1, Kyiv, 03058, Ukraine;
e-mail: professor_va@ukr.net
[2]National Academy of Internal Affairs, Solomyanska Sq., 1, Kyiv, 03035, Ukraine;
e-mail: kudinov_va@ukr.net

Today, the information society is emerging in the context of cybercrime, that is, crimes involving the misuse of cybernetic computer systems. Chapter XVI of the six articles of the Criminal Code of Ukraine is devoted to criminal offenses in the field of use of electronic computers (computers), systems and computer networks and telecommunication networks. In particular, article 3631 contains the crime of interfering with the operation of computers, automated systems, computer networks or telecommunication networks through the mass dissemination of telecommunication messages. Among the ways to combat the criminal offense under article 3631 is the creation of cyber-secure information systems. At present, the issues of conducting appropriate mathematical modeling of the functioning of cyber-protected information systems depending on the number of users within the meaning of article 3631 remain unresolved. Therefore, the purpose of this work was to conduct this study. Important results of this work are to obtain under the given initial conditions the corresponding mathematical expressions that allow to describe the behavior of the information system in general depending on the number of users (queries). The obtained results of mathematical modeling for certain parameters of the system are consistent with qualitative ideas about the behavior of the system and its saturation with increasing number of users. The practical significance of the results of the work is that its results can be used when choosing the parameters of cybersecured information systems being designed.
Keywords: mathematical modeling, information systems, system behavior, cybersecurity, system users.