

**МЕТОД ГРАНИЧНОЇ КОЛЛОКАЦІЇ ПРИ МОДЕЛЮВАННІ ЗАДАЧ ПРО
ВИГИНИ ШАРНІРНО-ОПЕРТОЇ ПЛАСТИНИ З ТОНКИМ ЛІНІЙНИМ
ВКЛЮЧЕННЯМ**

В. В. Грібова, Л. В. Бовнегра, О. В. Торопенко

Національний університет «Одеська політехніка»

1, Шевченка пр., м. Одеса, 65044, Україна

Emails: gribova@op.edu.ua, dlv5@ukr.net, toropenko.a.v@op.edu.ua

Широке використання конструкцій у вигляді пластин і оболонок в машинобудуванні, кораблебудуванні, приладобудуванні і інших галузях виробництва робить актуальним дослідження міцності і жорсткості елементів цих конструкцій. Наявність в конструкціях підкріплюючих стержнів, опор, прямолінійних дефектів типу тріщин і включень або інших неоднорідностей значно ускладнює їхній розрахунок, так як перераховані елементи в конструкціях є концентраторами напружень. Актуальним є створення нових і удосконалення існуючих методів дослідження концентрації напружень в пружних тілах. Сучасна механіка деформованого твердого тіла послуговується широким набором математичних моделей для опису вигину пластин і оболонок. Із різних моделей контакту пластини з ребром жорсткості найпростішою є модель, в якій передбачається, що ребро жорсткості не має товщини і контакт здійснюється по лінії. Контакт по розімкнутій лінії має місце також у випадку наявності лінійної опори або коли на пластину давить гостролінійний штамп. Всі перераховані випадки (ребро жорсткості, опора, гостролінійний штамп) математично еквівалентні. Математичне формулювання перерахованих випадків призводить до змішаних задач теорії пластин і оболонок, які можуть розглядатись як змішані задачі теорії пружності. Ціллю даної роботи є подальша розробка і деталізація методів рішення задач і дослідження на основі цих методів ряду нових задач пружної рівноваги пластин з лінійним включенням, один або обидва кінця якого знаходяться всередині пластини. Методика, що використовується в роботі полягає в наступному: минаючи стадію зведення задачі до інтегрального рівняння відносно контактних зусиль і рішення цього рівняння, прогини пластини записуються у вигляді лінійної комбінації рішень бігармонійного рівняння в області, яку займає пластина. Невідомі коефіцієнти лінійної комбінації відшукувались методом граничної колокації. Основними результатами роботи є побудова системи рішень бігармонійного рівняння в області з прямолінійним включенням, застосування метода граничної колокації для знаходження коефіцієнтів лінійної комбінації для моделювання систем.

Ключові слова. Система бігармонійних функцій, метод граничної колокації, клас функцій з особливостями, що не інтегруються, вигини пластини, моделювання.

Вступ. Розглядається задача про вигин пластини з тонким лінійним включенням. Відомо, що наявність в конструкціях підкріплюючих стержнів, опор, прямолінійних дефектів типу тріщини і включень значно ускладнює їх розрахунок, так як перераховані елементи в конструкціях є концентраторами напружень. Традиційним методом рішення таких задач є метод, заснований на зведенні задач до інтегральних рівнянь відносно контактних зусиль. Відомі дослідження в цьому напрямку [1 – 4]. Метою роботи є подальша розробка і деталізація методів рішення задач вигину пластин з лінійними включеннями, де рішення задач відбувається у вигляді лінійної комбінації бігармонійних функцій, які враховують наявність включення для кінцевої пластини.

Основна частина. Розглянемо прямокутну шарнірно-оперту пластину ($|x| < a$, $|y| < b$), всередині якої на відріжку $y = 0$, $|y| \leq c$ присутнє тонке жорстке включення. Враховуючи, що поза включенням на пластину не діє розподілене навантаження, приходимо до однорідного бігармонійного рівняння відносно прогинів пластини:

$$\Delta^2 \omega(x, y) = 0, \quad |x| < a, \quad |y| < b \quad \text{окрім } y = 0, |x| < c, \quad (1)$$

де $\omega(x, y)$ – прогини пластини.

Включення переміщується вертикально під дією прикладеного до нього навантаження P . В математичній постановці включення можна розглядати як розріз з межами $y = \pm 0, |x| \leq c$. На межі розрізу виконуються умови:

$$\omega(x, \pm 0) = W_0 \quad |x| \leq c, \quad (2)$$

$$\omega'_y(x, \pm 0) = 0 \quad |x| \leq c, \quad (3)$$

На сторонах пластини задані умови шарнірного спираання:

$$\omega(\pm a, y) = M_x(\pm a, y) = 0, \quad |y| \leq b, \quad (4)$$

$$\omega(x, \pm b) = M_y(x, \pm b) = 0, \quad |x| \leq a. \quad (5)$$

Потрібно знайти розподіл прогинів, згинальних моментів, узагальнених перериваючих сил.

З урахуванням парності задачі по x і y наближене представлення прогину $\omega_N(x, y)$ можна записати у вигляді [5]

$$\omega_N(x, y) = \omega_\psi(x, y) + \omega_\chi(x, y) + \omega_0(x, y), \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \text{де } \omega_\psi(x, y) = & \psi_0 \operatorname{Re} \left\{ \left(z\bar{z} + \frac{1}{2} \right) \ln \left(z + (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \right) - \frac{3}{2} z (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} + 2iy (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \right\} + \\ & + \psi_1 \operatorname{Re} \left\{ \ln \left(z + (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \right) - z (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} + 2iy (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \right\} + \\ & + \sum_{n=2}^N \psi_n \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2(2n-2)} (z^2 - 1)^{\frac{3}{2}} P_{2n-3}^{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}}(z) - iy (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} P_{2n-2}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(z) \right\}; \\ \omega_\chi(x, y) = & \chi_0 \operatorname{Re} \left\{ -(1+\nu) \ln \left(z + (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \right) - z (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} + (1+\nu) 2iy (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \right\} + \\ & + \sum_{n=2}^N \chi_n \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{4n} (1+\nu) (z^2 - 1)^{\frac{3}{2}} P_{2n-1}^{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}}(z) + (1-\nu) iy (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} P_{2n}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(z) \right\}; \\ \omega_0(x, y) = & \sum_{n=0}^N \left(a_n \operatorname{Re} (z^{2n}) + b_n \operatorname{Re} (\bar{z} z^{2n+1}) \right); \\ z = & x + iy. \end{aligned}$$

Після заміни багаточленів Якобі $P_n^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(z)$, $P_n^{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}}(z)$ багаточленами тих же ступенів від z , отримуємо представлення прогину

$$\omega(x, y) = \sum_{n=0}^N a_n u_n(x, y); \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \text{де } u_0(x, y) = & \operatorname{Re} \left(\ln \left(z + (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \right) - z (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \right); \quad u_1(x, y) = \operatorname{Re} \left(\left(z\bar{z} - 1 \right) \ln \left(z + (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \right) \right); \\ u_{4n-2}(x, y) = & \operatorname{Re} \left(z^{2n-1} (z^2 - 1)^{\frac{3}{2}} \right), \quad n = \overline{1, N}; \quad u_{4n-1}(x, y) = \operatorname{Re} \left(2iy z^{2n-2} (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \right), \quad n = \overline{1, N}; \\ u_{4n}(x, y) = & \operatorname{Re} z^{2n-2}, \quad n = \overline{1, N}; \quad u_{4n+1}(x, y) = \operatorname{Re} \bar{z} z^{2n-1}, \quad n = \overline{1, N}. \end{aligned}$$

Невідомі постійні коефіцієнти $\psi_n, \chi_n, a_n, b_n (n = \overline{0, N})$ шукаються методом граничної колокації [6] – наближеним методом розв’язку диференціальних рівнянь, який полягає в зведенні рішення до системи алгебраїчних рівнянь. Для знаходження невідомих постійних коефіцієнтів використовуються граничні умови, які задовольняються не на всьому контурі, а в особливих, попередньо заданих точках колокації. Функція (6) задовольняє рівнянню (1) при будь-яких значеннях $4(N+1)$ коефіцієнтів $\psi_n, \chi_n, a_n, b_n (n = \overline{0, N})$. Легко перевірити, що функція (6) задовольняє умові (3) тотожно. В зв’язку з цим можливі два підходи до рішення задачі (1)... (5):

- шукати наближене представлення прогину у вигляді (6), тоді умова (3) задовольняється тотожно, а умови (2), (4), (5) – колокаційно;
- шукати наближене представлення прогину у вигляді (7), тоді умови (2)... (5) задовольняються в точках колокаційно.

Вибираючи n_1 точок колокації на включенні $y = \pm 0, 0 \leq x \leq c$, n_2 – на стороні $x = a, 0 \leq y \leq b$, n_3 – на стороні $y = b, 0 \leq x \leq a$, і послідовно підставляючи їх значення в (6) і (7), приходимо до системи відповідно $n_1 + 2(n_2 + n_3)$ лінійних алгебраїчних рівнянь в першому випадку і $2(n_1 + n_2 + n_3)$ рівнянь – в другому.

Рішення цих систем, представлене в (6) або (7), дає наближене рішення задачі (1)... (5).

Розрахунки проведені для пластин $a = b$ при відносній довжині включення $\varepsilon = c/a$, що дорівнює 0,66; 0,5; 0,2; 0,1. Значення прогинів, отримані з допомогою представлень (6) і (7), добре погоджуються між собою.

Прогини для пластини з розмірами $a = b = 2, \varepsilon = 0,5$ показані на рис. 1. Прогини максимальні на включенні, де вони рівні $W_0 = 1$, зменшуються до нуля на контурі пластини, що свідчить, що добре задовольняються умовам (2)... (5) обидвома методами.

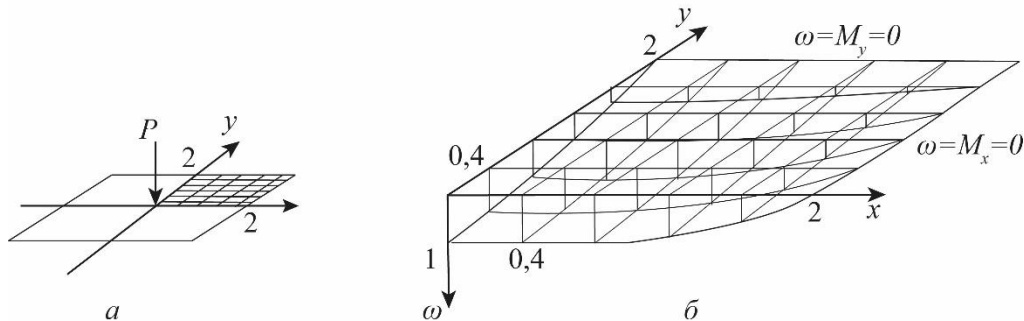


Рис. 1. Розподіл прогинів пластини

Оптимальне з точки зору відповідності граничним умовам, розміщення точок колокації в залежності від величини $\varepsilon = c/a$, наведено в таблиці 1.

Таблиця 1.

$\varepsilon = c/a,$	Кількість точок колокації					
	Представлення					
	(6)			(7)		
	n_1	n_2	n_3	n_1	n_2	n_3
0,66	6	5	4	4	3	3
0,5	6	5	4	4	3	3
0,2	3	3	3	4	3	3
0,1	3	3	3	3	3	3

При використанні (6) розраховувалась рівнодіюча контактних зусиль

$$D^{-1}P = \int_0^1 \Psi(\xi) d\xi = \psi_0 \int_0^1 16 \frac{d\xi}{(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}} + \psi_1 \int_0^1 128 \frac{P_2^{-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}}(\xi)}{(1-\xi^2)^{\frac{3}{2}}} d\xi + \sum_{n=2}^N 64n(2n-1) \psi_k \int_0^1 (1-\xi^2)^{-\frac{3}{2}} P_{2n}^{-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}}(\xi) d\xi. \quad (8)$$

Для розрахунку регуляризованих значень розбіжних інтегралів в (8) скористаємось тим, що при $\text{Re } \lambda > -1$ [1, 2].

$$I_n(\lambda) = \int_0^1 (1-x^2)^\lambda P_{2n}^{\lambda, \lambda}(x) dx = 0 \quad (n \geq 0). \quad (9)$$

Відповідно в регуляризованому значенні $I_n\left(-\frac{3}{2}\right) = 0$, звідки $D^{-1}P = 8\pi\psi_0$.

При представленні прогину у вигляді (7) рівнодіюча контактних зусиль $D^{-1}P = 8\pi a_0$. Ця задача методом інтегральних перетворень зведена до інтегрального рівняння відносно скачка рівнодіючої контактних зусиль [1, 2]. Порівняння отриманих значень безрозмірного коефіцієнта $\alpha = 10^3 (Pa^2)^{-1} DW$ (6), (7) з відомими [2, 3] наведено в табл. 2.

Таблиця 2.

Значення безрозмірного коефіцієнта α

$\varepsilon = c/a,$	$\alpha = 10^3 (Pa^2)^{-1} DW$ (6), (7)		
	[1, 2]	(6)	(7)
0,66	2,16	2,29	2,13
0,5	4,40	4,64	4,68
0,2	9,60	9,63	9,17
0,1	10,75	10,98	10,60

Графіки згинальних моментів M_x, M_y вздовж лінії $y = \pm 0, 0 \leq x \leq a$ наведені на рис. 2; $a = 2$. При $(x, y) \rightarrow (1, 0)$ $M_x, M_y \rightarrow \infty$ як $r^{\frac{1}{2}}, r = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$.

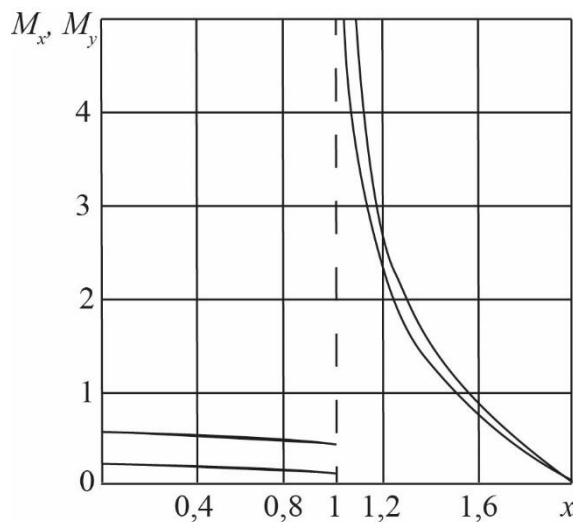


Рис. 2. Графіки згинальних моментів M_x, M_y вздовж лінії $y = \pm 0, 0 \leq x \leq a: D=1, P=13,9$.

Епюри величин $K_x = \lim \frac{M_x \sqrt{r}}{P \sqrt{c}}$, $K_y = \lim \frac{M_y \sqrt{r}}{P \sqrt{c}}$, при $r = 10^{-4}$ наведені на

рис.3. Якісна картина аналогічна результатам [3], де розглядалися безкінечні пластини.

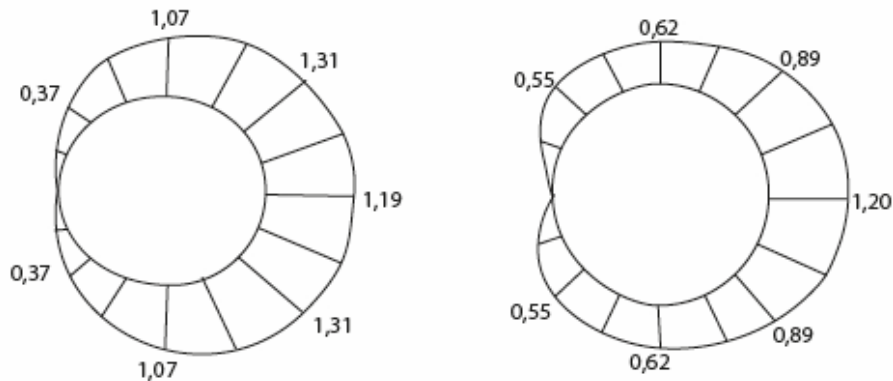


Рис. 3. Епюри K_x (a), K_y (b).

Отримані результати показують, що використання методу граничної колокації достатньо ефективно при вирішенні задач вигину нескінчених пластин з включеннями.

Список літератури

1. Кривий О. Ф., Морозов Ю. О. Особливості поля напружень в околі міжфазного кругового включення при змішаних умовах контакту із кусково-однорідним трансверсально-ізотропним простором. *Прикладна механіка*. 2024. Т. 60, № 3. С. 91–100. URL: <http://jnas.nbuiv.gov.ua/article/UJRN-0001493980>
2. Usov A., Morozov Yu., Kunitsyn M., Tonkonozhenko A., Chernush I.. Investigation of the influence of structural inhomogeneities on the strength of welded joints of functionally gradient materials. *Proceedings of Odessa Polytechnic University*. 2020. No. 1. V. 60.
3. DOI: <https://doi.org/10.15276/opu.1.60.2020.03>
4. Kryvyi O.F., Morozov Y. O. Influence of Concentrated Forces on an Interface Inclusion under the Conditions of Smooth Contact in the Inhomogeneous Transversely Isotropic Space. *J Math Sci* 279. 2024. P.197–212. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10958-024-07005-3>
5. Kryvyi O. F., Morozov Y. O. Stress Field Features in Vicinity of Interfacial Circular Inclusion Under Mixed Contact Conditions with Piecewise Homogeneous Transversely Isotropic Space. *Int Appl Mech*. 2024. V.60, P.331–340. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10778-024-01286-6>
6. Грібова В. В., Перстньова В. В. Розрахунок деформації прямокутної пластини з тонким лінійним включенням. *Actual problems of practice and science methods of their solution: The IV International Science Conference*. 2022. P. 515–518.

THE METHOD OF BOUNDARY COLLOCATION FOR SIMULATING PROBLEMS ABOUT CURVES OF A HINGED-OPERATED PLATE WITH A THIN LINEAR INCLUSION

V. Gribova, L. Bovnegra, O. Toropenko

National Odesa Polytechnic University
1, Shevchenko Ave., Odesa, 65044, Ukraine

Emails: gribova@op.edu.ua, dlvs5@ukr.net, toropenko.a.v@op.edu.ua

The widespread use of structures in the form of plates and shells in mechanical engineering, shipbuilding, instrumentation and other industries makes it important to study the strength and stiffness of the elements of these structures. The presence of reinforcing rods, supports, straight-line defects such as cracks and inclusions or other inhomogeneities in structures significantly complicates their calculation, as these elements in structures are stress concentrators. It is important to develop new and improve existing methods for studying stress concentration in elastic bodies. Modern mechanics of deformable solids uses a wide range of mathematical models to describe the bending of plates and shells. Of the various models of plate contact with a stiffener, the simplest is the model in which the stiffener is assumed to have no thickness and contact is made along a line. Open line contact also occurs when there is a linear support or when the plate is pressed against a sharp-edged die. All of these cases (stiffener, support, sharp-line stamp) are mathematically equivalent. The mathematical formulation of these cases leads to mixed problems of the theory of plates and shells, which can be considered as mixed problems of the theory of elasticity. The purpose of this paper is to further develop and detail the methods for solving the problems and to study, on the basis of these methods, a number of new problems of elastic equilibrium of plates with a linear inclusion, one or both ends of which are inside the plate. The methodology used in this work is as follows: bypassing the stage of reducing the problem to an integral equation with respect to contact forces and solving this equation, the deflections of the plate are written as a linear combination of solutions of the biharmonic equation in the region occupied by the plate. The unknown coefficients of the linear combination were found by the boundary collocation method. The main results of the work are the construction of a system of solutions for a biharmonic equation in the domain with a straightforward inclusion, and the application of the method of boundary collocation to find the coefficients of the linear combination for simulating systems.

Keywords: system of biharmonic functions, boundary collocation method, class of functions with noninteger singularities, deflections of a plate, simulation.