УДК 004.94

Informatics and Mathematical Methods in Simulation
Vol. 7 (2017), No. 4, pp. 285-290

СПРОЩЕННЯ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ОБ’ЄКТІВ З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ НА ОСНОВІ МЕТОДУ РОЗЩЕПЛЕННЯ

А.А. Верлань[1], В.А. Іванюк[2]

[1] Норвезький університет науки і технологій,
NTNU Gjøvik, Teknologiveien 22, 2815 Gjøvik, Norway; e-mail: andriy.verlan@ntnu.no
[2] Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка,
вул. Уральська, 1, Кам’янець-Подільський, 32300, Україна; e-mail: wivanyuk@gmail.com

У статті розглянуто методи побудови спрощених моделей багатовимірних задач теплопровідності у вигляді добутку розв’язків одновимірних задач. Ефективність запропонованого підходу показано на основі аналізу складності чисельної реалізації даних моделей за допомогою різницевих методів.

Ключові слова: диференціальні рівняння в частинних похідних, задача теплопровідності, еквівалентні перетворення

Вступ

Інтенсивний розвиток комп’ютерно-інтегрованих систем характеризується постійно зростаючою складністю їх режимів, підвищення вимог до якості функціонування (швидкодія, точність, надійність, економічність тощо). Ці чинники породжують нові вимоги до методів і засобів математичного моделювання динамічних процесів у вказаних системах, в тому числі необхідність суттєвого врахування розподіленості параметрів елементів, вузлів, блоків та систем в цілому. Існуючі методи і засоби, що використовуються для розв’язування задач моделювання об’єктів з розподіленими параметрами, в переважній більшості ґрунтуються на використанні моделей у вигляді диференціальних рівнянь з частинними похідними [1, 2, 3, 4]. Серед чисельних методів розв’язання даних задач з двома або трьома просторовими змінними найбільш відомими є метод сіток та метод скінченних елементів, що породжує системи лінійних алгебраїчних рівнянь великої розмірності. Для підвищення точності часто використовується методика згущення сіток навколо точок з особливостями [3, 5]. Це приводить до збільшення часу розрахунків при розв’язуванні поставлених задач. Тому розробка методів еквівалентного перетворення базових моделей з метою забезпечення специфічних часових і ресурсних вимог є актуальною задачею [6].

Метою роботи є аналіз складності еквівалентних моделей багатовимірних задач теплопровідності.

Основна частина

Еквівалентні перетворення базових моделей. Розглянемо рівняння теплопровідності [1]:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x_3^2}=\frac{1}{\chi}\frac{\partial v}{\partial t}, \quad t>0, \tag{1}$$

для прямокутного паралелепіпеда:

$$a_1 < x_1 < b_1\,, \quad a_2 < x_2 < b_2, \quad a_3 < x_3 < b_3, \tag{2}$$

де $v = v(x_1, x_2, x_3, t)$ – шукана функція температури; x_1, x_2, x_3, t – незалежні змінні, які визначають просторові координати та час; $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ – сталі; χ – коефіцієнт температуропровідності.

Для деяких важливих типів початкових і граничних умов його розв’язком є добуток розв’язків трьох задач з однією змінною [1]; таким чином, якщо останні відомі, можна відразу ж написати і розв’язок поставленої задачі.

Припустимо, що функції $v_r = v_r\left(x_r, t\right)$, де $r = 1, 2, 3$, є розв’язками одновимірних рівнянь теплопровідності:

$$\frac{\partial^2 v_r}{\partial x_r^2} = \frac{1}{\chi}\frac{\partial v_r}{\partial t}, \; a_r < x_r < b_r, \; t > 0\,, \tag{3}$$

з граничними умовами:

$$\alpha_r \frac{\partial v_r}{\partial x_r} - \beta_r v_r = 0, \; x_r = a_r, \; t > 0\,;$$

$$\alpha'_r \frac{\partial v_r}{\partial x_r} + \beta'_r v_r = 0, \; x_r = b_r, \; t > 0,$$

де $\alpha_r, \beta_r, \alpha'_r, \beta'_r$ – сталі, кожна з яких може бути рівною нулю (таким чином, включені випадки нульової початкової температури і відсутність теплового потоку на поверхні). Нехай початкові умови задаються функціями $V_r\left(x_r\right)$:

$$v_r\left(x_r, t\right) = V_r\left(x_r\right), \; t = 0, \; a_r < x_r < b_r\,, \; r = 1, 2, 3.$$

Тоді розв’язком рівняння (1) в області (2) при початковій умові:

$$v = V_1\left(x_1\right)V_2\left(x_2\right)V_3\left(x_3\right), \; t = 0\,, \tag{4}$$

і при граничних умовах:

$$\alpha_r \frac{\partial v}{\partial x_r} - \beta_r v = 0, \quad x_r = \alpha_r, \quad t > 0, \quad r = 1,2,3: \tag{5}$$

$$\alpha'_r \frac{\partial v}{\partial x_r} + \beta_r v = 0, \quad x_r = b_r, \quad t > 0, \quad r = 1,2,3\,, \tag{6}$$

є

$$v = v_1\left(x_1, t\right)v_2\left(x_2, t\right)v_3\left(x_3, t\right). \tag{7}$$

При підстановці виразу (7) в рівняння (1) і при використанні (3) отримаємо:

$$v_2 v_3 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + v_1 v_3 \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} + v_1 v_2 \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_3^2} = \frac{1}{\chi}\left(v_2 v_3 \frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 v_3 \frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 v_2 \frac{\partial v_3}{\partial t} \right).$$

При цьому очевидно, що задовольняються початкові та граничні умови (4), (5) і (6).

Розглянемо також диференціальне рівняння в частинних похідних, задане в циліндричних системах координат [1]:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{1}{\chi}\frac{\partial v}{\partial t}, \tag{8}$$

де $v = v(r,z,t)$ – шукана функція температури; r,z,t – незалежні змінні, які визначають просторові координати та час.

Припустимо, що його необхідно розв’язати в області

$$a < r < b\ ,\ z_1 < z < z_2, \tag{9}$$

де a, b, z_1, z_2 – сталі.

Нехай функція $v_1 = v_1\left(r,t\right)$ є розв’язком рівняння

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_1}{\partial r} \right) = \frac{1}{\chi}\frac{\partial v_1}{\partial t}, \quad t > 0, \quad a < r < b, \tag{10}$$

при граничних та початковій умовах:

$$\alpha_1 \frac{\partial v_1}{\partial r} - \beta_1 v_1 = 0,\ \ r = a,\ \ t > 0\ ;$$

$$\alpha_1' \frac{\partial v_1}{\partial r} + \beta_1' v_1 = 0,\ \ r = b,\ \ t > 0\ ;$$

$$v_1 = V_1\left(r\right) \text{ при } t{=}0,$$

де $\alpha_1, \beta_1, \alpha_1', \beta_1'$ – сталі, кожна з яких може бути рівною нулю, $V_1\left(r\right)$ – задана функція.

Нехай також функція $v_2 = v_2\left(z,t\right)$ є розв’язком рівняння

$$\frac{\partial^2 v_2}{\partial z^2} = \frac{1}{\chi}\frac{\partial v_2}{\partial t}, \quad t > 0, \quad z_1 < z_2 < z_3,$$

при граничних та початковій умовах:

$$\alpha_2 \frac{\partial v_2}{\partial z} - \beta_2 v_2 = 0,\ \ z = z_1,\ \ t > 0\ ;$$

$$\alpha_2' \frac{\partial v_2}{\partial z} + \beta_2' v_2 = 0,\ \ z = z_2,\ \ t > 0\ ;$$

$$v_2 = V_2(z) \text{ при } t{=}0,$$

де $\alpha_2, \beta_2, \alpha'_2, \beta'_2$ – сталі, кожна з яких може бути рівною нулю, $V_2(z)$ – задана функція.

Тоді розв’язком рівняння (8) в області (9) є:

$$v = v_1(r,t)\, v_2(z,t), \tag{11}$$

при граничних умовах:

$$\alpha_1 \frac{\partial v}{\partial r} - \beta_1 v = 0, \;\; r = a, \;\; z_1 < z < z_2, \;\; t > 0,$$

$$\alpha'_1 \frac{\partial v}{\partial r} + \beta'_1 v = 0, \;\; r = b, \;\; z_1 < z < z_2, \;\; t > 0,$$

$$\alpha_2 \frac{\partial v}{\partial z} - \beta_2 v = 0, \;\; z = z_1, \;\; a < r < b, \;\; t > 0,$$

$$\alpha'_2 \frac{\partial v}{\partial z} + \beta'_2 v = 0, \;\; z = z_2, \;\; a < r < b, \;\; t > 0$$

і при початковій умові

$$v = V_1(r)V_2(z) \text{ при } t = 0.$$

Такий же прийом може бути використаний і для інших областей, наприклад у випадку необмеженого прямого двогранного кута, напівобмеженого циліндра та ін.

Оцінка моделей. При пошуку розв’язків вказаних задач за допомогою чисельних методів, що побудовані на основі різницевих схем, отримуються системи лінійних алгебраїчних рівнянь, розмірність яких залежить від розбиття за просторовими та часовою змінними. Складність чисельної реалізації можна оцінити на основі кількості операцій, що необхідні для розв’язання систем алгебраїчних рівнянь [3, 5].

Так, у випадку двовимірної моделі (8), вважатимемо, що кількість точок розбиття по просторовій змінній r буде рівною M_1, по змінній $z - M_2$, по часовій змінній $t - N$. В результаті, при застосуванні різницевих методів, буде отримано систему лінійних алгебраїчних рівнянь розмірності $M_1 M_2 N$ для моделі (8) та $M_1 N + M_2 N = (M_1 + M_2)N$ для моделі (11). Без зменшення загальності, для спрощення наступної оцінки, припустимо, що розбиття по просторових змінних однакове: $M = M_1 = M_2$. Тобто, матимемо системи алгебраїчних рівнянь розмірності $M^2 N$ та $2MN$ відповідно для двовимірної моделі та двох одновимірних.

Для розв’язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь часто застосовуються такі методи, як метод Гауса, LU-розклад, метод Холецького, метод ітерацій тощо. Кількість операцій, необхідних для використання кожного з методів при розв’язуванні n-вимірної системи лінійних рівнянь рівна: $\frac{2}{3}n^3$ – метод Гауса, $\frac{2}{3}n^3$ – LU-розклад, $\frac{1}{3}n^3$ – метод Холецького, $2n^2 L$ – метод ітерацій, де L – кількість ітерацій. Оцінка складності розв’язання двовимірної задачі (8) та сукупності одновимірних задач (10) представлена в табл. 1.

Аналогічні оцінки зроблені і для випадку тривимірної моделі (1). Вважатимемо, що кількість точок розбиття по просторових змінних x_1, x_2, x_3 буде рівною M, за часовою змінною $t - N$. В результаті застосування різницевих схем отримано системи алгебраїчних рівнянь розмірності M^3N та $3MN$ відповідно для тривимірної моделі та трьох одновимірних. Оцінка складності розв'язання тривимірної задачі (1) та сукупності одновимірних задач (3) представлена в таблиці 2.

Для оцінки складності використовується відносний показник складності δ_T, який визначається, як відношення кількості операцій, що необхідні для розв'язання базової моделі та спрощених моделей.

Таблиця 1.

Оцінка складності розв'язання двовимірної задачі

Тип задачі	Метод Гауса	LU-розклад	Метод Холецького	Метод ітерації
	Кількість операцій			
Двовимірна задача	$\frac{2}{3}M^6N^3$	$\frac{2}{3}M^6N^3$	$\frac{1}{3}M^6N^3$	$2M^4N^2L$
Дві одновимір-ні задачі	$\frac{2}{3}2^3M^3N^3$	$\frac{2}{3}2^3M^3N^3$	$\frac{1}{3}2^3M^3N^3$	$4M^2N^2L$
	Відносний показник складності δ_T			
	$\frac{1}{2^3}M^3$	$\frac{1}{2^3}M^3$	$\frac{1}{2^3}M^3$	$\frac{1}{2}M^2$

Таблиця 2.

Оцінка складності розв'язання тривимірної задачі

Тип задачі	Метод Гауса	LU-розклад	Метод Холецького	Метод ітерації
	Кількість операцій			
Тривимірна задача	$\frac{2}{3}M^9N^3$	$\frac{2}{3}M^9N^3$	$\frac{1}{3}M^9N^3$	$2M^6N^2L$
Три одновимір-ні задачі	$\frac{2}{3}3^3M^3N^3$	$\frac{2}{3}3^3M^3N^3$	$\frac{1}{3}3^3M^3N^3$	$6M^2N^2L$
	Відносний показник складності δ_T			
	$\frac{1}{3^3}M^6$	$\frac{1}{3^3}M^6$	$\frac{1}{2^3}M^6$	$\frac{1}{3}M^4$

При реалізації двовимірної та тривимірної моделей також витрачається час для знаходження загального розв'язку на основі розв'язків одновимірних задач. Кількість операцій при цьому дорівнює, відповідно, M^2N та M^3N, але вона не впливає на порядок відносного показника складності.

На основі відносного показника порівняння складності, можна зробити висновок, що спрощення вихідних двовимірних та тривимірних задач дозволяє скоротити кількість обчислювальних операцій при знаходженні чисельних розв'язків при застосуванні прямих методів розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь в □ M^3 разів та в □ M^6 разів відповідно; у випадку застосування методу ітерацій кількість операцій скорочується в □ M^2 разів та в □ M^4 разів відповідно.

Висновки

Отримані результати мають суттєве практичне значення і можуть застосовуватись при побудові комп'ютерно-інтегрованих систем, що мають у своєму складі моделі об'єктів з розподіленими параметрами, зокрема, вони дозволяють достатньо економно отримувати чисельні значення температур у твердих тілах, якщо їх початкова температура постійна, а з поверхні відбувається теплообмін в середовище з постійною температурою.

Список літератури

1. Carslaw, H.S. Conduction of Haet in Solids / H.S. Carslaw, J.C. Jaeger. — 2 Edition. — Oxford: Oxford University Press, 1986. — 520 p.
2. Иванюк, В.А. Способы формирования передаточных функций приемника теплового потока / В.А. Иванюк, Н.Л. Костьян, А.И. Махович. // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки: зб. наук. праць / Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова Національної академії наук України, Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка. — 2013. — Вип. 8. — С. 61–69.
3. Самарский, А.А. Вычислительная теплопередача / А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич. — М.: Едиториал УРСС, 2003. — 784 с.
4. Скопецький, В.В. Математичне моделювання прямих та обернених задач динаміки систем з розподіленими параметрами / В.В. Скопецький, В.А. Стоян, Ю.Г. Кривонос. — К.: Наукова думка, 2002. — 361 с.
5. Самарский, А.А. Аддитивные схемы для задач математической физики / А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич. — М.: Наука, 2001. — 319 с.
6. Verlan, A.A. An Approach to the Precision Parametric Reduction of Mathematical Models / A.A. Verlan. // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки: зб. наук. праць / Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова Національної академії наук України, Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка. — 2016. — Вип. 14. — С. 26–35.

УПРОЩЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ОБЪЕКТОВ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ НА ОСНОВЕ МЕТОДА РАСЩЕПЛЕНИЯ

А.А. Верлань[1], В.А. Иванюк[2]

[1] Норвежский университет науки и технологий,
NTNU Gjøvik, Teknologiveien 22, 2815 Gjøvik, Norway; e-mail: andriy.verlan@ntnu.no
[2] Каменец-Подольский национальный университет имени Ивана Огиенка,
ул. Уральская, 1, Каменец-Подольский, 32300, Украина; e-mail: wivanyuk@gmail.com

В статье рассмотрены методы построения упрощенных моделей многомерных задач теплопроводности в виде произведения решений одномерных задач. Эффективность предложенного подхода представлено на основе анализа сложности численной реализации данных моделей с помощью разностных методов.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения в частных производных, задача теплопроводности, эквивалентные преобразования

SIMPLIFICATION OF MATHEMATICAL MODELS OF OBJECTS WITH DISTRIBUTED PARAMETERS BY THE METHOD OF SPLITTING

A.A. Verlan[1], V.A. Ivanyuk[2]

[1] Norwegian University of Science and Technology,
NTNU Gjøvik, Teknologiveien 22, 2815 Gjøvik, Norway; e-mail: andriy.verlan@ntnu.no
[2] Kamyanets-Podilskyi Ivan Ohienko National University,
1, Uralska Str., Kamyanets-Podilskyi, 32300, Ukraine; e-mail: wivanyuk@gmail.com

The article deals with the methods of constructing simplified models of multidimensional heat conduction problems in the form of products of solutions of one-dimensional problems. The effectiveness of the proposed approach is shown based on the analysis of the complexity of numerical implementation of these models.

Keywords: differential equations in partial derivatives, heat conduction problem, equivalent transformations